01;05;06

О ТИПАХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ СВЯЗАННОЙ СПИНОВОЙ СИСТЕМЫ ОПТИЧЕСКИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ И ЯДЕР В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

© *Е.В.Галактионов, А.С.Зильберглейт, Ю.А.Половко, Э.А.Тропп*

Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 11 января 1995 г.)

Исследованы квазистационарные состояния (состояния, характеризующиеся тем, что несколько компонент решения постоянны, а остальные меняются со временем) системы, моделирующей динамику связанной спиновой системы оптически ориентированных электронов и ядер в полупроводниках. Найдены ограничения на параметры системы, обеспечивающие существование двух типов квазистационарных состояний: периодических состояний с двумя постоянными компонентами и состояний сложной структуры с одной постоянной компонентой.

Введение

В работах [1,2] были предложены и в некоторых частных случаях исследованы уравнения, описывающие динамику связанной спиновой системы электронов и ядер при условиях оптической ориентации в полупроводниках:

$$\mathbf{k} - \mathbf{s} + \mathbf{H} \times \mathbf{s} = 0, \quad \frac{d\mathbf{H}}{d\tau} = \mathbf{h} - \mathbf{H} + \hat{a}\mathbf{s}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\tau)$ — средний спин ориентированных электронов; $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\tau)$ — полное поле, действующее на электронные спины, т.е. сумма постоянного внешнего магнитного поля $\mathbf{h}$ и эффективного ядерного поля; $\mathbf{k}$ — единичный вектор начальной ориентации спина; $\hat{a} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ — вещественная 3×3 матрица, описывающая поляризацию ядер ориентированными электронами.

Все величины в (1) и далее безразмерны, их характерные масштабы выбраны в [2], причем время τ нормировано на характерное время релаксации ядер T_N.

Нахождению всех стационарных состояний системы (1), их классификации и изучению свойств посвящена работа [3]. Некоторые результаты, касающиеся стационарных состояний системы (1) и их устойчивости при специальном виде матрицы $\hat{a}$ и внешнего поля $\mathbf{h}$, были получены еще в [2]. Кроме того, в этой работе было найдено состояние системы, в котором электронный спин и ядерное поле прецессируют вокруг $\mathbf{h}$.

Возникает вопрос, при каких ограничениях на параметры системы (1) в ней возможно существование состояний, характеризующихся тем, что несколько компонент решения постоянны, а остальные меняются со временем. Такие решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений впервые рассмотрены в [4], где получены достаточные условия их существования, а сами решения названы квазистационарными. В настоящей работе найдены достаточные условия существования в системе (1) двух типов квазистационарных состояний, а именно периодических и непериодических.

Поиск квазистационарных состояний

Система (1) представляет собой совокупность шести скалярных уравнений относительно трех вещественных компонент s_1, s_2, s_3 электронного спина $\mathbf{s}$ и трех вещественных компонент H_1, H_2, H_3 полного поля $\mathbf{H}$. При этом первые три уравнения системы есть линейные по s_1, s_2, s_3 алгебраические уравнения, решение которых $\mathbf{s}(\mathbf{H})$, будучи подставлено в следующие три уравнения, превращает их в автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно H_1, H_2, H_3. Однако для упрощения выкладок будем работать с системой в форме (1). Не ограничивая общности, можно считать, что матрица $\hat{a}$ из (1) имеет блочно-треугольный вид, причем, например, $a_{31} = a_{32} = 0$. Последнее утверждение следует из того, что уравнения (1) инвариантны относительно ортогонального преобразования искомых вектор-функций $\mathbf{s}$ и $\mathbf{H}$, а произвольная действительная матрица $\hat{a}$ ортогонально подобна блочно-треугольной матрице [3]. С учетом этого шестое уравнение исходной системы принимает следующий вид:

$$\dot{H}_3 = h_3 - H_3 + a_{33}s_3. \qquad (2)$$

При поиске квазистационарных состояний естественно предположить, что система (1) имеет решение, у которого в силу структуры матрицы $\hat{a}$ именно компонента H_3 не меняется со временем ($H_3 = H_{30} = \mathrm{const}$). В этом случае уравнение (2) переходит в

$$h_3 - H_{30} + a_{33}s_3 = 0. \qquad (3)$$

В зависимости от значения матричного элемента a_{33} можно искать два типа квазистационарных состояний.

1) Квазистационарные состояния в случае $a_{33} \neq 0$. При этом из уравнения (3) немедленно вытекает, что компонента решения s_3 также постоянна, и естественно искать квазистационарные состояния системы (1) типа

$$s_3 = s_{30} = \mathrm{const}, \quad H_3 = H_{30} = \mathrm{const},$$

$$s_1 = s_1(\tau), \quad s_2 = s_2(\tau), \quad H_1 = H_1(\tau), \quad H_2 = H_2(\tau), \tag{4}$$

где компоненты s_1, s_2, H_1, H_2, вообще говоря, отличны от постоянных.

Найдем условия, которым должны удовлетворять параметры $\mathbf{k}$, $\mathbf{h}$ и $\hat{a}$ (в форме с $a_{31} = a_{32} = 0$) исследуемой системы (1), для того, чтобы она имела квазистационарные решения вида (4).

Разрешая первые два уравнения исходной системы (1) относительно компонент s_1, s_2 с учетом (4), получаем

$$s_1 = [\gamma_1 + (H_{30}H_1 + H_2)s_{30}]/\varkappa,$$

$$s_2 = [\gamma_2 + (H_{30}H_1 - H_1)s_{30}]/\varkappa, \tag{5}$$

где $\varkappa = 1 + H_{30}^2$, $\gamma_1 = k_1 - k_2H_{30}$, $\gamma_2 = k_2 + k_1H_{30}$.

Четвертое и пятое уравнения системы (1) после подстановки в них выражений (5) для s_1 и s_2 дают следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно компонент H_1 и H_2

$$\dot{H}_1 = \Big[s_{30}(a_{11}H_{30} - a_{12})/\varkappa - 1\Big]H_1 + s_{30}(a_{12}H_{30} + a_{11})/\varkappa \cdot H_2 +$$

$$+ h_1 + a_{13}s_{30} + (a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2)/\varkappa,$$

$$\dot{H}_2 = s_{30}(a_{21}H_{30} - a_{22})/\varkappa \cdot H_1 + \Big[s_{30}(a_{22}H_{30} + a_{21})/\varkappa - 1\Big]H_2 +$$

$$+ h_2 + a_{23}s_{30} + (a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2)/\varkappa. \tag{6}$$

Третье уравнение системы (1) с учетом (5) перепишем в форме

$$F(H_1, H_2) \equiv s_{30}(H_1^2 + H_2^2) - \gamma_2H_1 + \gamma_1H_2 = (k_3 - s_{30})\varkappa. \tag{7}$$

И наконец, соотношение (3) можно рассматривать как условие на компоненту h_3 внешнего магнитного поля

$$h_3 = H_{30} - a_{33}s_{30}. \tag{8}$$

Итак, для существования квазистационарного решения вида (4) (при условии, что (8) имеет место) достаточно, чтобы решения линейной системы (6) удовлетворяли соотношению (7). Другими словами, достаточно, чтобы функция $F(H_1, H_2)$ представляла собой интеграл системы (6), а начальные данные $H_1(0)$, $H_2(0)$ этой системы подчинялись (7). Приравнивая тождественно нулю полную производную по времени функции $F(H_1, H_2)$ в силу уравнений (6), получаем шесть соотношений, связывающих постоянные коэффициенты, входящие в исходную систему (1), и выбранные значения H_{30}, s_{30}

$$s_{30}[\varkappa - (a_{11}H_{30} - a_{12})s_{30}] = 0, \tag{9}$$

$$s_{30}[\varkappa - (a_{22}H_{30} + a_{21})s_{30}] = 0, \tag{10}$$

$$s_{30}^2[a_{11} - a_{22} + (a_{12} + a_{21})H_{30}] = 0, \tag{11}$$

$$\varkappa[\gamma_2 + 2(h_1 + a_{13}s_{30})s_{30}] + \Big[(2a_{11} - a_{22} + a_{21}H_{30})\gamma_1 +$$

$$+ (3a_{12} - a_{11}H_{30})\gamma_2\Big]s_{30} = 0, \tag{12}$$

$$\varkappa[-\gamma_1 + 2(h_2 + a_{23}s_{30})s_{30}] + \Big[(3a_{21} + a_{22}H_{30})\gamma_1 +$$

$$+ (2a_{22} - a_{11} - a_{12}H_{30})\gamma_2\Big]s_{30} = 0, \tag{13}$$

$$\varkappa\Big[(h_2 + a_{23}s_{30})\gamma_1 - (h_1 + a_{13}s_{30})\gamma_2\Big] + a_{21}\gamma_1^2 +$$

$$+ (a_{22} - a_{11})\gamma_1\gamma_2 - a_{12}\gamma_2^2 = 0. \tag{14}$$

Посмотрим, возможно ли существование квазистационарного состояния вида (4) с $s_{30} = 0$ (по физическому смыслу задачи $s_3 \in [-1, 1]$; формально это следует из тождества $s^2 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{k}$, справедливого в силу первого из векторных уравнений (1)). Очевидно, что при $s_{30} = 0$ условия (9)–(11) удовлетворяются, а условия (12), (13) дают

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0. \tag{15}$$

В этом случае (14), очевидно, удовлетворяется. Далее, при $s_{30} = 0$ из соотношений (5) с учетом (15) немедленно следует $s_1 = s_2 = 0$ и приходим к $\mathbf{s} = 0$. В этом случае из первого векторного уравнения системы (1) следует $\mathbf{k} = 0$, что противоречит условию $|\mathbf{k}| = 1$. Таким образом, $s_{30} \neq 0$. Принимая это во внимание, из соотношений (9)–(11) находим

$$a_{11} = a_{22} = \alpha, \quad a_{12} = -a_{21} = -\beta, \tag{16}$$

где α, β — вещественные числа, удовлетворяющие уравнению связи

$$(\beta + \alpha H_{30})s_{30} = \varkappa. \tag{17}$$

Соотношения (12), (13) при условии $s_{30} \neq 0$ и с учетом (16), (17) дают следующие выражения для первых двух компонент внешнего магнитного поля $\mathbf{h}$:

$$h_1 = -a_{13}s_{30} + \Big[(\beta H_{30} - \alpha)/\varkappa \cdot k_1 + (\beta + 1/s_{30})k_2\Big]/2,$$

$$h_2 = -a_{23}s_{30} + \Big[-(\beta + 1/s_{30})k_1 + (\beta H_{30} - \alpha)/\varkappa \cdot k_2\Big]/2. \tag{18}$$

Если условия (16)–(18) выполнены, то, как легко проверить, соотношение (14) удовлетворяется тождественно. Таким образом, можно сформулировать следующее.

Предложение 1 (достаточные условия существования квазистационарных состояний типа (4)). Пусть параметры, входящие в систему (1), удовлетворяют условиям а) матрица $\hat{a}$ имеет структуру, определяемую соотношениями (16), причем постоянные α, β связаны соотношением (17) (компоненты a_{13}, a_{23} и $a_{33} \neq 0$ произвольны); б) компоненты внешнего магнитного поля $\mathbf{h}$ задаются формулами (8), (18).

Тогда, если начальные данные $H_1(0)$, $H_2(0)$ для системы уравнений (6) удовлетворяют соотношению (7), то система (1) имеет квазистационарные решения вида (4).

Можно утверждать, что для всякой заданной пары вещественных чисел s_{30}, H_{30}, взятых из области допустимых по физическому смыслу задачи значений ($s_{30} \in [-1,0) \cup (0,1]$, $H_{30} \in (-\infty,+\infty)$), существует квазистационарное решение вида (4), если выполнены все условия предложения 1. Заметим, что достаточные условия можно видоизменить, а именно задавать компоненты вектора $\mathbf{h}$, а элементы a_{13}, a_{23}, a_{33} матрицы $\hat{a}$ выразить через них с помощью соотношений (8), (12), (13).

В том случае, когда условия предложения 1 выполнены, правые части линейной системы (6) упрощаются и она принимает вид

$$\dot{H}_1 = \omega H_2 + [\omega k_1/s_{30} + (\beta - 1/s_{30})k_2]/2,$$

$$\dot{H}_2 = -\omega H_1 - [(\beta - 1/s_{30})k_1 - \omega k_2/s_{30}]/2, \tag{19}$$

где $\omega = s_{30}(\alpha - \beta H_{30}/\varkappa)$.

Заметим, что если постоянные α, β, H_{30} выбраны таким образом, что $\omega = 0$, то правые части системы (19) обращаются в нуль [5] и квазистационарное решение вида (4) переходит в стационарное.

Интегрируя систему (19) в предположении $\omega \neq 0$, получаем следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть выполнены условия предложения 1 и $s_{30} \neq 0$, $\alpha \neq \beta H_{30}$, тогда система (1) имеет периодическое квазистационарное состояние типа (4) с периодом $2\pi/\omega$, причем

$$H_1(\tau) = H_1(0)\cos(\omega\tau) + 0.5\Big[(\beta - 1/s_{30})k_1/\omega - k_2/s_{30}\Big](\cos(\omega\tau) - 1) +$$

$$+ \Big[H_2(0) + 0.5k_1/s_{30} + 0.5(\beta - 1/s_{30})k_2/\omega\Big]\sin(\omega\tau),$$

$$H_2(\tau) = H_2(0)\cos(\omega\tau) + 0.5\Big[k_1/s_{30} + (\beta - 1/s_{30})k_2/\omega\Big](\cos(\omega\tau) - 1) -$$

$$- \Big[H_1(0) + 0.5(\beta - 1/s_{30})k_1/\omega - 0.5k_2/s_{30}\Big]\sin(\omega\tau), \tag{20}$$

а компоненты $s_1(\tau)$, $s_2(\tau)$ определяются по формулам (5).

Заметим, что найденное периодическое квазистационарное состояние зависит от пяти постоянных (коэффициенты k_1, k_2, s_{30}, H_{30}, α, β и соотношение (17)).

Линейная система (19) при $\omega \neq 0$ имеет одно стационарное состояние

$$H_1^0 = 0.5[-(\beta - 1/s_{30})k_1/\omega + k_2/s_{30}],$$

$$H_2^0 = -0.5[k_1/s_{30} + (\beta - 1/s_{30})k_2/\omega],$$

если H_1^0, H_2^0 удовлетворяют соотношению (7). С помощью подбора параметров этого можно добиться, например, случай $k_1 = k_2 = 0$, $s_{30} = 1$. Найденное стационарное состояние на плоскости H_1, H_2 является центром.

В частном случае, рассмотренном в [2] (матрица $\hat{a}$ имеет диагональный вид, $k_3 = 1$, $h_1 = h_2 = 0$), квазистационарные решения, найденные по формулам (20), (5), совпадают с решениями, приведенными в [2].

2) Квазистационарные состояния в случае $a_{33} = 0$. При этом уравнение (3) дает $h_3 = H_{30}$, а компонента s_3 может изменяться со временем. Следовательно, естественно разыскивать квазистационарные состояния системы (1) типа

$$H_3 = H_{30} = \text{const} = h_3, \quad H_1 = H_1(\tau), \quad H_2 = H_2(\tau), \quad \mathrm{s} = \mathrm{s}(\tau). \qquad (21)$$

В этом случае компоненты s_1 и s_2 определяются по формулам (5), но с учетом того факта, что $s_3 = s_3(\tau)$ не есть постоянная. Соотношение (7) позволяет выразить компоненту s_3 через H_1, H_2 и H_{30}

$$s_3 = (k_3\varkappa + \gamma_2 H_1 - \gamma_1 H_2)/(\varkappa + H_1^2 + H_2^2). \qquad (22)$$

Подставляя выражение для s_1, s_2 в четвертое и пятое уравнения системы (1), получаем нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения компонент H_1 и H_2

$$\dot{H}_1 = h_1 + (a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2)/\varkappa - H_1 +$$
$$+ \left\{a_{13} + \left[(a_{11}H_{30} - a_{12})H_1 + (a_{12}H_{30} + a_{11})H_2\right]/\varkappa\right\}s_3,$$
$$\dot{H}_2 = h_2 + (a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2)/\varkappa - H_2 +$$
$$+ \left\{a_{23} + \left[(a_{21}H_{30} - a_{22})H_1 + (a_{22}H_{30} + a_{21})H_2\right]/\varkappa\right\}s_3, \qquad (23)$$

где s_3 определяется согласно (22).

Всякое решение этой нелинейной системы (23) дает компоненты $H_1(\tau)$, $H_2(\tau)$ квазистационарного состояния системы (1) типа (21). Компонента $s_3(\tau)$ этого состояния определяется по формуле (22), а компоненты $s_1(\tau)$, $s_2(\tau)$ находятся, как сказано выше.

В общем случае это квазистационарное состояние не является периодическим и имеет сложную структуру, о чем говорит хотя бы анализ стационарных состояний системы (23). Как следует из [3], каждое стационарное состояние системы (23) представляет собой H_1 и H_2 компоненты стационарного состояния полной системы (1) для случая $a_{33} = 0$. Поэтому на основании результатов, полученных в работе [6], можно

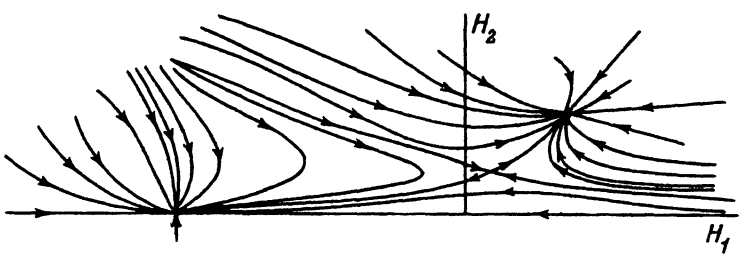

Схема фазового портрета системы (24) в верхней полуплоскости.

утверждать, что число стационарных состояний системы (23) может быть меньше либо равно пяти. Причем в [6] найден набор параметров системы (1), обеспечивающий существование ровно пяти стационарных состояний, а именно $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$; $h_1 = 12$, $h_2 = h_3 = 0$; $a_{11} = -18$, $a_{22} = 4.5$, $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0$. Система (23), возникающая при исследовании квазистационарных состояний системы (1) с таким набором параметров для случая $H_3 = H_{30} = h_3 = 0$, имеет вид

$$\dot{H}_1 = -6 - H_1 + H_1 + 18H_2^2/(1 + H_1^2 + H_2^2),$$
$$\dot{H}_2 = -H_2 + 4.5H_1H_2/(1 + H_1^2 + H_2^2). \qquad (24)$$

Система (24) имеет пять стационарных состояний

$$\{(H_1, H_2)\}_{i=1}^5 = \{(0.4, 0.8), (2, 2), (-6, 0), (2, -2), (0.4, -0.8)\},$$

которые располагаются на фазовой плоскости симметрично относительно прямой $H_2 = 0$. Анализ их устойчивости показывает, что состояния $(0.4, 0.8)$ и $(0.4, -0.8)$ — седла, а все остальные — устойчивые узлы. На рисунке схематично представлен фазовый портрет системы (ввиду симметрии показана лишь верхняя полуплоскость). Из проведенного анализа видно, что квазистационарные состояния второго типа с $a_{33} = 0$ могут определять очень сложное поведение системы (1) в отличие от квазистационарных состояний первого типа с $a_{33} \neq 0$, которые являются периодическими. Кроме этого, необходимо отметить, что система (1) не имеет других квазистационарных состояний, кроме описанных выше.

В заключение авторы выражают благодарность Л.А.Бакалейникову за полезные обсуждения в процессе работы над статьей.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 93-02-2611.

Список литературы

[1] *Дьяконов М.И., Меркулов И.А., Перель В.И.* ЖЭТФ. 1979. Вып. 1. Т. 76. С. 314–324.
[2] *Дьяконов М.И., Меркулов И.А., Перель В.И.* // ЖЭТФ. 1980. Т. 78. Вып. 1. С. 349–359.
[3] *Артемова Е.С., Галактионов Е.В., Зильберглейт А.С.* Препринт ФТИ. им. А.Ф.Иоффе. № 1264. Л., 1988. 38 с.
[4] *Зильберглейт А.С.* // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 10. С. 1807–1809.
[5] *Галактионов Е.В., Зильберглейт А.С.* Препринт ФТИ им. А.Ф.Иоффе. № 1473. Л., 1990. 12 с.
[6] *Галактионов Е.В., Зильберглейт А.С., Роскин П.Л.* Препринт ФТИ им. А.Ф.Иоффе. № 1622. С-Пб., 1994. 11 с.