ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СЛАБОМ НИЗКОЧАСТОТНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© *Ю.А.Карташов, И.В.Попов*

Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 23 февраля 1995 г.)

Со времен Лармора много усилий физиков было направлено на решение проблем движения заряженных частиц в электромагнитном поле. Очень затрудняет исследование то обстоятельство, что в функцию Лагранжа входит скалярное произведение вектор-потенциала и скорости частицы. Поэтому часто ограничиваются решением задачи методом возмущений [1].

В то же время в ряде приложений (теории циклических ускорителей, электровакуумных приборов, биофизики и даже астрофизики) необходимо получить решения именно в той области, где метод возмущений уже непригоден. Например, даже слабые местные аномалии магнитного поля могут вызвать различные неустойчивости движения, хорошо известные в технике циклических ускорителей [2].

В настоящей работе рассмотрена динамика движения заряда в электромагнитном поле, которое является пространственно однородным, но напряженность которого медленно изменяется во времени.

Итак, представим, что имеется постоянное однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}_0$, на которое накладывается периодическая переменная составляющая $\mathbf{B}'$ (тоже однородная), причем будем полагать, что $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{B}_0$ направлены одинаково и по величине порядка или менее геомагнитного. Пусть частица массой m, несущая заряд q, имеет начальную скорость $\mathbf{V}_0$, направленную перпендикулярно $\mathbf{B}_0$, и движется в этом поле под действием сил Лоренца по окружности радиуса R_0. Как будет изменять ее траекторию переменная составляющая $\mathbf{B}'$? Можно написать уравнение для нерелятивистского случая, которым мы ограничим рассмотрение

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = q\Big(\mathbf{E}' + \mathbf{V}\times\mathbf{B}\Big) - \alpha\mathbf{V};$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \tag{1}$$

где α — коэффициент "сопротивления" среды; $\mathbf{E}'$ — электрическое поле индукции за счет составляющей $\mathbf{B}'$, которое перпендикулярно вектору $\mathbf{B}'$.

Следует отметить, что в общем случае α зависит от $\mathbf{B}$. Будем считать, что при малых $\mathbf{B}$, обусловливающих низкие частоты, $\alpha = \mathrm{const}$ и не зависит от $\mathbf{B}$.

Введем декартову систему координат. В проекциях на оси координат уравнение (1) имеет вид

$$m\frac{dV_x}{dt} = qE'_x + qV_yB - \alpha V_x, \tag{2a}$$

$$m\frac{dV_y}{dt} = qE'_y - qV_xB - \alpha V_y, \tag{2б}$$

$$m\frac{dV_z}{dt} = -\alpha V_z. \tag{2в}$$

Из системы уравнений (2) видно, что траектория частицы остается расположенной в плоскости XY.

Будем полагать, что магнитное поле осесимметрично (например, поле внутри соленоида). В таком случае имеют место выражения [3]

$$E'_x = \frac{y_0}{2}\frac{dB'}{dt}, \qquad E'_y = -\frac{x_0}{2}\frac{dB'}{dt},$$

где x_0, y_0 — координаты центра круговой траектории частцы в постоянном магнитном поле $\mathbf{B}_0$, отсчитанные, например, от центра соленоида.

При этом пусть характерный размер области δ_0, занимаемой траекторией частицы, очень мал по сравнению с расстоянием $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, т.е. $\delta_0 \ll r_0$. В таком случае поле $\mathbf{E}'$ можно считать однородным (разумеется, можно уточнить задачу, учитывая следующие члены разложения E' по пространственным координатам, например, учитывая еще и градиент электрического поля; в данном случае ограничимся первыми членами разложения). Здесь следует отметить, что все дальнейшие выводы практически не усложняются, если однородное поле $\mathbf{E}'$ — внешнее, т.е. имеет другую частоту и фазу по отношению к переменному магнитному полю $\mathbf{B}'$.

Если решать систему уравнений (2а), (2б) обычной подстановкой, то для V_x, V_y получатся линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Например, для V_x

$$\frac{d^2V_x}{dt} = \frac{1}{B}\frac{dB}{dt}\frac{dV_x}{dt} + \left(\frac{q}{m}B\right)^2 V_x = \frac{q}{m}\frac{dE'_x}{dt} + \left(\frac{q}{m}\right)^2 BE'_y - \frac{q}{m}\frac{E'_x}{B}\frac{dB}{dt}. \tag{4}$$

Трудно угадать решения этих уравнений, хотя, как ниже будет показано, они имеют довольно простой вид. Важно только отметить, что наличие периодических коэффициентов в (4) за счет переменной компоненты $\mathbf{B}'$ магнитного поля может привести к появлению непериодических решений для V_x.

Решение системы (2а), (2б) находится наиболее просто, если использовать понятие комплексной скорости и напряженности электрического поля

$$\tilde{V} = V_x + iV_y, \qquad \tilde{E}' = E'_x + iE_y$$

и обозначить $\omega = (q/m)B$. Тогда получим, умножая уравнение (2б) на i и складывая с (2а),

$$\frac{d\tilde{V}}{dt} + i\omega\tilde{V} = \frac{q}{m}\tilde{E}' - \frac{\alpha}{m}\tilde{V}. \tag{5}$$

Методом вариации постоянных решение уравнения (5) легко находится

$$\tilde{V} = \exp\left[-i\varphi(t) - \frac{\alpha}{n}t\right]\left[\tilde{V}_0 + \frac{q}{m}\int\limits_0^t \tilde{E}'(u)\exp\Big(i\varphi(u) + \frac{\alpha}{m}u\Big)du\right], \tag{6}$$

где V_0 — начальная комплексная скорость,

$$\tilde{V}_0 = V_{0x} + iV_{0y},$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega d\tau = \frac{q}{m}\int_0^t B(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Вещественная часть выражения (6) определяет $V_x(t)$, а мнимая часть — $V_y(t)$.

Из указанного выражения видно различие между электрической и магнитной компонентами поля: если электрическая компонента определяет величину комплексной скорости частицы (они пропорциональны друг другу), то магнитная определяет фазу $\varphi(t)$ комплексной скорости. На радиотехническом языке это означает, что переменное во времени низкочастотное электрическое поле, как видно из (6), определяет как бы "амплитудную модуляцию" комплексной скорости, а переменное магнитное поле — ее "фазовую модуляцию", т.е. существенно нелинейный процесс.

Подставив в выражение (7) поле **B** в виде суммы постоянной и переменной составляющих, получим

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{q}{m}\int_0^t B'(\tau)d\tau, \tag{8}$$

где ω_0 — циклотронная частота в поле B_0, $\omega_0 = (q/m)B_0$.

Учитывая периодичность функции $B'(t)$, можно использовать разложение Фурье

$$\exp\left[-i\frac{q}{m}\int_0^t B'(\tau)d\tau\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\Bigl(-in\Omega t\Bigr), \tag{9}$$

где $\Omega = 2\pi/T$, T — период функции $B'(t)$,

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T \exp\left[-i\frac{q}{m}\int_0^t B'(\tau)d\tau\right]\exp\Bigl(in\Omega t\Bigr)dt.$$

Представим функцию $B'(t)$ аналогичным рядом Фурье. Тогда функция $\tilde{E}'(t)$ будет иметь вид (см.(3))

$$\tilde{E}'(t) = -\frac{i\tilde{r}_0}{2}\frac{\partial B'}{\partial t} = -\frac{\tilde{r}_0\Omega}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nb_n \exp(-in\Omega t), \tag{10}$$

где $\tilde{r}_0 = x_0 + iy_0$.

Подставляя теперь выражения (8), (9) и (10) в формулу (6) для комплексной скорости, после преобразования получим

$$\tilde{V} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left[-\frac{\alpha}{m}t - i(\omega_0 + n\Omega)t\right] \times$$

$$\times \left\{ \tilde{V}_0 - \frac{q\tilde{r}_0\Omega}{2m} \sum_{k,s=-\infty}^{\infty} k b_k C_s^* \frac{\exp\left\{\frac{\alpha}{m}t + i[\omega_0 + \Omega(s-k)]t\right\} - 1}{\frac{\alpha}{m}t + i[\omega_0 + \Omega(s-k)]} \right\}, \tag{11}$$

где C_s^* — комплексно-сопряженное значение коэффициента C_s.

Из выражения (11) видно, что комплексная скорость $\tilde{V}$ при произвольных соотношениях между ω_0 и Ω имеет колебательный характер. Но в том случае, когда отношение этих частот есть целое число, появляется постоянная по направлению составляющая скорости.

Действительно, положим, например, что имеет место соотношение

$$\omega_0 = n\Omega, \tag{12}$$

где n_0 — целое число.

В таком случае для слагаемых номеров n, k, равных $n = -n_0$, $k = n_0 + s$, имеем для постоянной составляющей скорости $\tilde{V}_c$

$$\tilde{V}_c = C_{-n_0} \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \left[\tilde{V}_0 - \frac{q\tilde{r}_0\Omega}{2m} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (n_0 + s) b_{n_0+s} C_s^* \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{m}t\right) - 1}{\alpha/m}\right]. \tag{13}$$

Выражение для $\tilde{V}_c$ описывает поступательное движение заряженной частицы в плоскости XY в переменном электрическом поле, которое может со временем отнести частицу на значительное расстояние от первоначальной траектории. Рассмотрим, в частности, случай гармонического изменения поля B'

$$B' = B_0' \cos \Omega t. \tag{14}$$

При этом получим

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0'}{\Omega} \sin \Omega t,$$

$$C_n = J_n\left(\frac{\omega_0'}{\Omega}\right),$$

$$\omega_0' = \frac{q}{m} B_0',$$

$$b_1 = b_{-1} = \frac{1}{2} B_0',$$

$$b_n = 0; \qquad n = 0, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

С учетом разложения [4]

$$\exp(-iz\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\exp(-inz)$$

для постоянной составляющей скорости вместо (13) получим

$$\tilde{V}_c = J_{n_0}\left(\frac{\omega_0'}{\Omega}\right)(-1)^{n_0}\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\times$$

$$\times\left\{\tilde{V}_0 + \frac{(-1)^{n_0}}{4}\omega_0'\Omega\tilde{r}_0\left[J_{n_0-1}\left(\frac{\omega_0'}{\Omega}\right) - J_{n_0+1}\left(\frac{\omega_0'}{\Omega}\right)\right]\frac{\exp\left(\frac{\alpha}{m}t\right)-1}{\alpha/m}\right\}. \quad (15)$$

Из (15) видно, что скорость частиц приобретает постоянную составляющую и в малых переменных магнитных полях при выполнении условия резонанса (12), если $\frac{\alpha}{m}t \ll 1$, т.е. в этом случае наблюдается параметрический резонанс.

Отметим, что при выполнении условия параметрического резонанса резко возрастают и амплитуды колебательных составляющих скорости в выражении (11). Подчеркнем, что на частотах Ω, близких к частоте циклотронного резонанса ω_0' (резонанса по переменной составляющей поля), фаза $\varphi(t)$ комплексной скорости существенно изменяется, хотя амплитуда переменной составляющей B_0' магнитного поля может быть при этом весьма мала. Поэтому в этой области частот переменного магнитного поля неприменим метод возмущений, с помощью которого можно было бы надеяться исследовать при малых B_0' решение уравнения движения типа (4).

Вернемся к общему выражению (11) для комплексной скорости. Оно существенно упрощается при больших временах наблюдения, когда $t \gg \tau_0$, где $\tau_0 \approx m/\alpha$. При этом вместо выражения (11) имеем

$$\tilde{V} = -\frac{q\tilde{r}_0\Omega}{2m}\sum_{k,s,n=-\infty}^{\infty} C_n C_s^* k b_k \frac{\exp[i\Omega(s-k-n)t]}{1/\tau_0 + i[\omega_0 + \Omega(s-k)]}. \quad (16)$$

Выражение (16) описывает движение частицы, на которую действует периодическая электрическая сила в среде с внутренним стоксовским трением. При этом интересен только случай, когда имеет место условие $\tau_0\omega_0 \gg 1$. Для гармонического магнитного поля вида (14) в сумме по k в формуле (16) отличны от 0 слагаемые $k = 1$ и $k = -1$. Тогда получим вместо (16)

$$\tilde{V} = -\frac{\omega_0'\Omega\tilde{r}_0}{4}\sum_{s,n,=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{\omega_0'}{\Omega}\right) J_s\left(\frac{\omega_0'}{\Omega}\right)\left[\frac{\exp(i\Omega t)}{1/\tau_0 + i[\omega_0 + \Omega(s+1)]} - \right.$$

$$\left. - \frac{\exp(-i\Omega t)}{1/\tau_0 + i[\omega_0 + \Omega(s-1)]}\right]\exp[i\Omega(s-n)t].$$

При этом комплексный радиус-вектор $\tilde{r} = x + iy$, связанный с $\tilde{V}$ соотношением $\tilde{V} = d\tilde{r}/dt$, оказывается равным

$$\tilde{r} = \tilde{r}_0 - \frac{\omega_0' \Omega \tilde{r}_0}{4} \sum_{s,n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{\omega_0'}{\Omega}\right) J_s\left(\frac{\omega_0'}{\Omega}\right) \left\{ \frac{\exp[i\Omega(s-n+1)t]-1}{i\Omega(s-n+1)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{1/\tau_0 + i[\omega_0 + \Omega(s+1)]} - \frac{\exp[i\Omega(s-n-1)t]-1}{i\Omega(s-n-1)} \frac{1}{1/\tau_0 + i[\omega_0 + \Omega(s-1)]} \right\}. \tag{17}$$

Слагаемые в суммах по s и n в (17) имеют колебательный характер за исключением слагаемых с $s = n - 1$ и $s = n + 1$, которые описывают линейное изменение $\tilde{r}$ со временем. Изменение $\tilde{r}$ за счет этих слагаемых имеет

$$\Delta\tilde{r} = \tilde{r}_0 t \left(\frac{\omega_0'}{\Omega}\right) \frac{\Omega^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\omega_0'/\Omega)}{1/\tau_0 + i(\omega_0 + n\Omega)} \Big[J_{n-1}(\omega_0'/\Omega) - J_{n+1}(\omega_0'/\Omega) \Big]. \tag{18}$$

Из выражения (18) видно, что $\Delta\tilde{r}$ резко возрастает на частоте параметрического резонанса (12). Из (18) также следует, что скорость изменения величины комплексного радиуса-вектора увеличивается с ростом отношения $z = \omega_0'/\Omega$ при заданных ω_0 и Ω. При малых величинах z значения бесселевых функций в (18) $J_n(z)$ $(n \neq 0)$ порядка z. С ростом z до величины $z \sim 1$ произведение $J_n(z)J_{n+1}(z)$ вначале растет, а затем при $z \gg 1$ начинает уменьшаться. В результате по порядку величины максимальная скорость роста комплексного радиуса-вектора $\tilde{r}$ имеет место при достижении величин z значения порядка единицы: $\omega_0'/\Omega \simeq 1$, т.е. при условии циклотронного резонанса по амплитуде переменного поля $\Omega \simeq \omega_0' = (q/m)B'$.

Таким образом, при движении заряженной частицы перпендикулярно одинаково направленным слабым однородным магнитным полям (постоянному $\mathbf{B}_0$ и переменному медленно изменяющемуся $\mathbf{B}'$) можно отметить: 1) действие магнитной компоненты отличается от действия электрической; 2) действие переменного магнитного поля приводит к "фазовой модуляции" скорости частицы (нелинейный процесс), электрического — к "амплитудной модуляции" (линейный процесс); 3) уровень "фазовой модуляции" может достигать на низких частотах единиц радиан; это происходит даже при весьма малых уровнях индукции поля, что не позволяет в этих случаях применять метод возмущений; 4) "фазовая модуляция" приводит к бесконечному спектру частот колебаний скорости частицы; 5) существует параметрический резонанс на частотах, равных или в кратное число раз меньших циклотронной частоты по постоянной составляющей поля; на этих частотах частица покидает круговую траекторию, обусловленную постоянной составляющей магнитного поля; 6) одновременное действие фазовой и амплитудной модуляции на скорость частицы приводит к появлению постоянной составляющей скорости частицы (к постепенному уходу частицы с круговой траектории) и на частотах вне области параметрического резонанса; при этом величина постоянной составляющей скорости и амплитуды колебаний скорости частицы резко возрастают на частоте параметрического резонанса; 7) величина постоянной составляющей скорости и амплитуды колебаний скорости существенно зависят от амплитуды переменной составляющей магнитного поля.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить О.В.Константинова за обсуждение работы и сделанные замечания.

Список литературы

[1] *Левич В.Г.* Курс теоретической физики. М.: Наука, 1969. Т. 1. 912 с.
[2] *Брук Г.* Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1970. 311 с.
[3] *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1975. 446 с.
[4] *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963. Т. 2. 516 с.