01;03

О КАПИЛЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНОМ ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

© *С.О.Ширяева, А.И.Григорьев, В.А.Коромыслов*

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия
(Поступило в Редакцию 3 ноября 1994 г.)

Показано, что стационарная деформация капли электропроводной жидкости в пространственно неоднородном периодическом во времени электрическом поле и амплитуды резонансных и параметрически возбуждаемых капиллярных колебаний капли имеют один порядок малости (первый) и их взаимодействие может быть обнаружено лишь при аналитических расчетах более высокого порядка малости теории возмущений, чем первый.

Введение

Исследование капиллярных колебаний и устойчивости капель электропроводной жидкости в переменных во времени электрических полях проводилось неоднократно в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технике и технологии (см., например, [1] и указанную там литературу). Как показано в [2], в рассматриваемой ситуации при воздействии на каплю переменным во времени электрическим полем в ней возможно возбуждение колебаний двух типов: параметрических и вынужденных. Но при изучении колебаний указанных типов и устойчивости капли в поле, среднее по времени значение квадрата величины которого (определяющее давление поля на поверхность капли) отлично от нуля, необходимо исследовать равновесную форму капли. Поскольку среднее по времени значение давления поля на поверхность капли содержит не зависящее от времени слагаемое, то равновесная форма капли будет отлична от сферической [3]. В этой связи встает вопрос о взаимодействии искажения формы капли в пространственно неоднородном электрическом поле с переменной во времени компонентой давления поля на поверхность капли и вкладом этого взаимодействия в спектр реализующихся капиллярных колебаний капли. Такая задача представляет интерес прежде всего в связи с приложением к условиям грозового облака, где характерный масштаб пространственного изменения электрического поля может быть сравним с размером капли.

1. Пусть сферическая капля радиуса R несжимаемой, идеальной, идеальнопроводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ помещена в периодическое во времени электрическое поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_* \cos\omega_* t, \tag{1}$$

зависимость которого от пространственных координат определяется потенциалом вида

$$\Phi_0 = E_0 \left(A_0 \frac{r^2}{3R^2} P_0(\mu) + A_1 \frac{r}{R} P_1(\mu) + A_2 \frac{2r^2}{3R^2} P_2(\mu) \right), \tag{2}$$

где $\mu = \cos\theta$, угол θ отсчитывается от направления оси симметрии поля E_*; $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра; A_n — константы, имеющие размерность длины определяют долю вклада в неоднородность поля $\sim P_n(\mu)$, причем $|A_n/R| \sim 1$; E_0 — множитель, характеризующий амплитуду внешнего электрического поля, имеет размерность напряженности электрического поля.

Выбор пространственной неоднородности электрического поля в виде (2) обусловлен лишь соображениями математической простоты и удобства нижеследующего анализа и возможностью получения относительно общих выводов о закономерностях раскачки капиллярных колебаний в неоднородных полях.

Примем далее, что в капле существует капиллярное волновое движение с потенциалом скоростей $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$, происходящее уже в силу наличия теплового движения молекул. Учтем, что скорость движения в жидкости не превышает звуковой, а тем более скорости распространения электромагнитных взаимодействий в вакууме и электрическое поле индуцированных в капле зарядов будем описывать уравнениями электростатики. Будем считать, что ω_* по порядку величины близка к одной из собственных частот капиллярных волн в капле и амплитудное значение E_* много меньше критического значения E_{cr}, при котором в электростатическом поле капля с указанными характеристиками испытывает неустойчивость Тейлора. При таких условиях поверхность капли будет совершать малые колебания в окрестности сферической формы. В сферической системе координат, связанной с центром капли, уравнение поверхности капли, возмущенной капиллярным волновым движением, можно записать в форме

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t); \qquad |\xi| \ll R.$$

Условия постоянства объема и неподвижности центра масс имеют вид [4]

$$\int_0^\pi \xi(\theta, t) \sin\theta d\theta = 0, \qquad \int_0^\pi \xi(\theta, t) \sin\theta \cos\theta d\theta = 0. \tag{3}$$

2. Электрический потенциал заряда, индуцированного в сферической невозмущенной капле, представим в виде $\Phi_* = \Phi_0 + \Phi_1$, где Φ_0 — потенциал внешнего электрического поля в отсутствии капли; Φ_1 — добавка, возникающая при внесении проводящей капли в поле E_*, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta(\Phi_1) = 0 \tag{4}$$

с граничными условиями

$$r = R: \qquad \Phi_* = \mathrm{const} = 0, \quad \Phi_1 = -\Phi_0, \tag{5}$$

$$r \to \infty: \qquad \Phi_1 \to 0. \tag{6}$$

Решение задачи (4)–(6) естественно записать в виде ряда

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\alpha} C_n \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} P_n(\mu).$$

Удовлетворим граничному условию (5) на невозмущенной поверхности капли

$$r = R: \qquad \sum_{n=0}^{\alpha} C_n P_n(\mu) = -E_0 \left(\frac{1}{3} A_0 P_0(\mu) + A_1 P_1(\mu) + \frac{2}{3} A_2 P_2(\mu) \right).$$

В силу ортогональности полиномов Лежандра найдем выражения для неизвестных коэффициентов C_n

$$C_0 = -\frac{E_0 A_0}{3}, \quad C_1 = -E_0 A_1, \quad C_2 = -\frac{2 E_0 A_2}{3}, \quad C_n = 0, n > 2. \tag{7}$$

В итоге для Φ_* получим

$$\Phi_* = E_0 \left[\frac{1}{3} A_0 P_0(\mu) \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R}{r} \right) + A_1 P_1(\mu) \left(\frac{r}{R} - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{2}{3} A_2 P_2(\mu) \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^3}{r^3} \right) \right]. \tag{8}$$

Для нахождения зависимости электрического потенциала от пространственных координат в окрестности возмущенной поверхности капли представим его в виде

$$\Phi = \Phi_* + \delta\Phi, \tag{9}$$

где $\delta\Phi$ добавка, возникающая из-за искажения формы капли в приближении $|\xi| \ll R$ и являющаяся решением задачи,

$$\Delta(\delta\Phi) = 0$$

с граничными условиями [2]

$$\delta\Phi\Big|_R = -(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\Phi_*\Big|_R \approx -\xi \frac{\partial}{\partial r} \Phi_*\Big|_R \approx$$

$$\approx -\xi E_0 \left[\frac{1}{R} A_0 P_0(\mu) + \frac{3}{R} A_1 P_1(\mu) + \frac{10}{3R} A_2 P_2(\mu) \right]_R,$$

$$r \to \infty: \qquad \delta\Phi \to 0. \tag{10}$$

Будем искать $\delta\Phi$ в виде

$$\delta\Phi = \sum_{n=0}^{\alpha} E_0 K_n \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} P_n(\mu). \tag{11}$$

Подставим это выражение в граничное условие на поверхности капли (10)

$$\sum_{n=0}^{\alpha} E_0 K_n P_n(\mu) \approx -\frac{E_0\xi}{R}\left[A_0 P_0(\mu) + 3A_1 P_1(\mu) + \frac{10}{3}A_2 P_2(\mu)\right]$$

и найдем коэффициенты K_n

$$K_n = -\frac{2n+1}{2R}\left[A_0\int_{-1}^{1}\xi P_0(\mu)P_n(\mu)d\mu + 3A_1\int_{-1}^{1}\xi P_1(\mu)P_n(\mu)d\mu + \right.$$

$$\left. + \frac{10}{3}A_2\int_{-1}^{1}\xi P_2(\mu)P_n(\mu)d\mu\right]. \tag{12}$$

Тогда, подставляя (8) и (11) с учетом (12) в (9), окончательно получим

$$\Phi = E_0\left[\frac{1}{3}A_0 P_0(\mu)\left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R}{r}\right) + A_1 P_1(\mu)\left(\frac{r}{R} - \frac{R^2}{r^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}A_2 P_2(\mu)\left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^3}{r^3}\right) + \sum_{n=0}^{\alpha} K_n P_n(\mu)\frac{R^{n+1}}{r^{n+1}}\right]. \tag{13}$$

Чтобы выписать давление электрического поля $p_E = E^2/8\pi$ на поверхность капли в приближении $|\xi| \ll R$, необходимо знать напряженность поля в окрестности поверхности капли. Раскладывая, как и в (10), уравнение границы по степеням $|\xi|/R$, в линейном по $|\xi|/R$ приближении найдем

$$\mathbf{E}\Big|_{R+\xi} \approx [\mathbf{E} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\mathbf{E}]_R \approx -\left[\nabla\Phi + \xi\frac{\partial}{\partial r}(\nabla\Phi)\right]_R \cos\omega_* t. \tag{14}$$

Учтем, что в приближении волн бесконечно малой амплитуды можно пренебрегать вкладом в давление p_E от касательной к поверхности капли компоненты напряженности поля [5], т.е.

$$p_E = \frac{E^2}{8\pi} = \frac{E_n^2}{8\pi} \approx \frac{E_r^2}{8\pi}. \tag{15}$$

Подставляя (13) в (14), получим

$$E_n\Big|_R \approx -\frac{E_0}{R}\left[A_0P_0(\mu)+A_1P_1(\mu)\left(3-\frac{6\xi}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+A_2P_2(\mu)\left(\frac{10}{3}-\frac{20\xi}{3R}\right)-\sum_{n=0}^{\alpha}(n+1)K_nP_n(\mu)\right]\cos\omega_* t. \qquad (16)$$

Возводя (16) в квадрат и подставляя вместо $P_n(\mu)$ их выражения в явном виде, найдем в линейном по ξ/R приближении

$$E_n^2 \approx \frac{E_0^2}{R^2}\left\{A_0^2+A_1^2\cos^2\theta\left(9-\frac{36\xi}{R}\right)+\frac{1}{4}A_2^2\left(9\cos^4\theta-6\cos^2\theta+1\right)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{100}{9}-\frac{400\xi}{9R}\right)+2A_0A_1\cos\theta\left(3-\frac{6\xi}{R}\right)+A_0A_2\left(3\cos^2\theta-1\right)\left(\frac{10}{3}-\frac{20\xi}{3R}\right)+$$

$$+A_1A_2\left(3\cos^3\theta-\cos\theta\right)\left(10-\frac{40\xi}{R}\right)-2\left(A_0P_0(\mu)+3A_1P_1(\mu)+\frac{10}{3}A_2P_2(\mu)\right)\times$$

$$\left.\times\sum_{n=0}^{\alpha}(n+1)K_nP_n(\mu)\right\}\cos\omega_* t. \qquad (17)$$

Перепишем выражение (17), пренебрегая взаимодействием между соседними модами (в выражениях вида $\xi\cos^n\theta$ заменим $\cos^n\theta$ их средними за период значениями), и подставим результат в (15)

$$p_E \approx \frac{E_0^2}{8\pi R^2}\left\{P_0(\mu)\left(A_0^2+3A_1^2+\frac{20}{9}A_2^2\right)+P_1(\mu)\left(6A_0A_1+8A_1A_2\right)+\right.$$

$$+P_2(\mu)\left(6A_1^2+\frac{200}{63}A_2^2+\frac{20}{3}A_0A_2\right)+12P_3(\mu)A_1A_2+$$

$$+\frac{40}{7}P_4(\mu)A_2^2-2\left(A_0+\frac{5}{6}A_2\right)^2\sum_{n=0}^{\alpha}(n+1)K_nP_n(\mu)-$$

$$\left.-\left(18A_1^2+\frac{275}{9}A_2^2+\frac{10}{9}A_0A_2\right)\frac{\xi}{R}\right\}\cos^2\omega_* t. \qquad (18)$$

3. Волновое движение в капле будем считать потенциальным с потенциалом Ψ, который должен быть гармонической функцией внутри капли,

$$\Delta\Psi = 0, \qquad (19)$$

а на ее невозмущенной поверхности в линейном по ξ/R приближении должен удовлетворять известным граничным условиям [6]: кинематическому

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} \approx \frac{\partial\Psi}{\partial r},$$

и динамическому

$$-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial t}+p_E-p_0=p_\sigma, \tag{20}$$

где

$$p_\sigma=\sigma\left[\frac{2}{R}-\frac{1}{R^2}\left(2+\hat{L}\right)\right]\xi,$$

p_0 — внутреннее давление в жидкости, $\hat{L}$ — угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат.

Решение задачи (19), (20) будем искать в виде

$$\xi=\sum_{n=0}^{\alpha}U_n(t)P_n(\mu), \tag{21}$$

$$\Psi(\mathbf{r},t)=\sum_{n=0}^{\alpha}V_n(t)\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\mu), \tag{22}$$

где коэффициенты разложений $U_n(t)$ и $V_n(t)$ — величины первого порядка малости.

Подставим выражение (21) в соотношение (12) и, пренебрегая взаимодействием между соседними модами, выразим коэффициенты $K_n(t)$ через $U_n(t)$

$$K_n(t)=-\frac{U_n(t)}{R}\left[A_0+\frac{5}{6}A_2\right]. \tag{23}$$

Подставляя (23) в выражение (18) для давления электрического поля на поверхность капли с учетом (23), окончательно получим

$$p_E=\frac{E_0}{8\pi R^2}\left\{P_0\mu\left(A_0^2+3A_1^2+\frac{20}{9}A_2^2\right)+P_1(\mu)\Big(6A_0A_1+8A_1A_2\Big)+\right.$$

$$+P_2(\mu)\left(6A_1^2+\frac{200}{63}A_2^2+\frac{20}{3}A_0A_2\right)+12P_3(\mu)A_1A_2+\frac{40}{7}P_4(\mu)A_2^2+$$

$$+\frac{2}{R}\left[A_0+\frac{5}{6}A_2\right]^2\sum_{n=0}^{\alpha}(n+1)U_nP_n(\mu)-\frac{1}{R}\left(18A_1^2+\frac{275}{9}A_2^2+\frac{10}{3}A_0A_2\right)\times$$

$$\left.\times\sum_{n=0}^{\alpha}U_n(t)P_n(\mu)\right\}\cos^2\omega_* t. \tag{24}$$

Для лапласовского давления p_σ имеем

$$p_\sigma=\frac{2\sigma}{R}-\frac{2\sigma}{R^2}\sum_{n=0}^{\alpha}U_n(t)P_n(\mu)+\frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=0}^{\alpha}n(n+1)U_n(t)P_n(\mu). \tag{25}$$

Из кинематического граничного условия (20) с учетом (21), (22) получим связь между коэффициентами $U_n(t)$ и $V_n(t)$

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} = \frac{n}{R} V_n. \tag{26}$$

Подставляя в динамическое граничное условие (20) выражения (21) и (22) и учитывая (26), найдем

$$\sum_{n=0}^{\alpha} \frac{P_n(\mu)}{n} \frac{\partial^2 x_n}{\partial \tau^2} + \sum_{n=0}^{\alpha} (n-1)(n-2) x_n P_n(\mu) + \mathfrak{F}_0 -$$

$$- \Big[P_0(\mu) B_0 + P_1(\mu) B_1 + P_2(\mu) B_2 + P_3(\mu) B_3 + P_4(\mu) B_4 -$$

$$- H_1 \sum_{n=0}^{\alpha} x_n P_n(\mu) + H_2 \sum_{n=0}^{\alpha} (n+1) x_n P_n(\mu) \Big] \varepsilon \Big(1 + \cos 2\omega_* \tau\Big) = 0,$$

где

$$B_0 = \frac{1}{R^2} \left(A_0^2 + 3A_1^2 + \frac{20}{9} A_2^2 \right), \qquad B_1 = \frac{1}{R^2} \Big(6A_0 A_1 + 8 A_1 A_2 \Big),$$

$$B_2 = \frac{1}{R^2} \left(6A_1^2 + \frac{200}{63} A_2^2 + \frac{20}{3} A_0 A_2 \right), \qquad B_3 = \frac{12}{R^2} A_1 A_2,$$

$$B_4 = \frac{40}{7R^2} A_2^2, \qquad H_1 = \frac{1}{R^2} \left(18 A_1^2 + \frac{275}{9} A_2^2 + \frac{10}{3} A_0 A_2 \right),$$

$$H_2 = \frac{2}{R^2} \left[A_0 + \frac{5}{6} A_2 \right]^2, \qquad x_n = \frac{U_n}{R}, \qquad \tau = t \left(\frac{\sigma}{R^3 \rho} \right)^{1/2},$$

$$\omega_* = \omega_0 \left(\frac{R^3 \rho}{\sigma} \right)^{1/2}, \qquad \mathfrak{F}_0 = \frac{p_0 R}{\sigma} + 2, \qquad \varepsilon = \frac{E_0^2 R}{16 \pi \sigma}.$$

Учтем, что $U_0 = 0$, так как жидкость считается несжимаемой, и что в системе отсчета, связанной с цетром капли, $U_1 = 0$ (см. (3)). Тогда с учетом ортогональности полиномов Лежандра для описания временной эволюции амплитуд капиллярных колебаний капли для $n \geqslant 2$ получаем систему неоднородных уравнений типа Матье–Хилла

$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial \tau^2} + \Big(\delta_n^2 - \varepsilon \gamma_n \cos(2\omega_* \tau) \Big) x_n = \varepsilon n B_n \Big(1 + \cos(2\omega_* \tau) \Big), \tag{27}$$

где

$$\delta_n^2 = n(n-1)(n+2), \qquad \gamma_n = n \Big[(n+1) H_2 - H_1 \Big],$$

$$B_n = 0, \qquad n > 4.$$

4. Анализ системы уравнений (27) показывает, что она может иметь решения трех видов.

Пусть $\omega_* = 0$, т. е. рассмотрим ситуацию, когда внешнее поле является постоянным во времени, но неоднородным. Система (27) в этом случае сводится к системе

$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial \tau^2} + \left(\delta_n^2 - 2\varepsilon\gamma_n\right)x_n = 2\varepsilon n B_n. \tag{28}$$

Решения данной системы легко выписать

$$x_n = Q\cos(\omega_n \tau) + \frac{2\varepsilon B_n}{\omega_n^2},$$

$$\omega_n^2 = \delta_n^2 - 2\varepsilon\gamma_n.$$

Первое слагаемое в (29) соответствует собственным гармоническим колебаниям капли с частотой ω_n. Второе слагаемое, имеющее первый порядок малости, определяет искажение формы капли вследствие неоднородности давления внешнего поля, определяемой 2, 3 и 4-й модами (при $n > 4$ $B_n = 0$). Из выражения для ω_n^2 видно, что влияние внешнего неоднородного электрического поля на спектр собственных частот определяется слагаемым $2\varepsilon\gamma_n$. Видно, что частоты собственных капиллярных колебаний капли будут в первом порядке малости по ε изменяться с изменением величины внешнего поля и величины деформации поверхности в соответствии со знаком γ_n, который будет зависеть от номера моды и от соотношения величин коэффициентов A_i в (2).

Для отыскания решений системы (27) при $\omega_* \neq 0$ в приближении $\varepsilon \ll 1$ воспользуемся стандартным методом многих масштабов [7]. Перепишем систему (27) в виде

$$\left[D_n^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \ldots\right]\left[Z_0 + \varepsilon Z_1 + \ldots\right] +$$

$$+\left(\delta_n^2 - \varepsilon\gamma_n - \varepsilon\gamma_n\cos(2\omega_* T_0)\right)\left[Z_0 + \varepsilon Z_1 + \ldots\right] = n\varepsilon B_n\left(1 + \cos(2\omega_* T_0)\right), \tag{30}$$

где $x_n = Z_0 + \varepsilon Z_1 + \ldots$; $\tau = T_0 + \varepsilon T_1 + \ldots$; $\partial^2/(\partial\tau^2) = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \ldots$; $D_0 = \partial/(\partial T_0)$; $D_1 = \partial/(\partial T_1)$.

Уравнение нулевого приближения

$$D_0^2 Z_0 + \delta_n^2 Z_0 = 0$$

решается легко

$$Z_0 = M(T_1)\exp(i\delta_n T_0) + \bar{M}(T_1)\exp(-i\delta_n T_0),$$

где $M(T_1)$ и $\bar{M}(T_1)$ — комплексно сопряженные функции, зависящие от T_1, имеющие смысл коэффициентов (черта над M означает комплексное сопряжение), т. е. в нулевом приближении имеем чисто гармонические колебания с невозмущенными частотами δ_n.

В первом порядке приближения по ε из (30) получим систему неоднородных уравнений

$$D_0^2 Z_1 + \delta_n^2 Z_1 = \frac{nB_n}{2}\exp(2iT_0\omega_*) + nB_n -$$

$$- i2\delta_n \frac{\partial M(T_1)}{\partial T_1}\exp(i\delta_n T_0) + \gamma_n M(T_1)\exp(i\delta_n T_0) +$$

$$+ \frac{\gamma_n}{2}\bar{M}(T_1)\left(\exp\Big(-iT_0(\delta_n - 2\omega_*)\Big) + \exp\Big(-iT_0(\delta_n + 2\omega_*)\Big)\right) +$$

$$+ (\text{комплексно сопряженные члены}). \tag{31}$$

Легко видеть, что для первых четырех мод капиллярных колебаний при $\delta_n \approx 2\omega_*$ будет иметь место линейный резонанс. При $\omega_* \approx \delta_n$ для $n \geqslant 2$ в системе реализуется параметрическая неустойчивость n-й моды капиллярных колебаний по отношению к переменному во времени неоднородному электрическому полю. В этом случае внутри полосы частот

$$\delta_n - \frac{3\gamma_n}{4\delta_n} \leqslant \omega_* \leqslant \delta_n - \frac{\gamma_n}{4\delta_n} \tag{32}$$

амплитуда капиллярных колебаний будет расти экспоненциально во времени с инкрементом α_n

$$\alpha_n = \left(\lambda_1^2 - \lambda_1 \frac{\gamma_n}{\delta_n} + \frac{3\gamma_n^2}{16\delta_n^2}\right)^{1/2},$$

где $\lambda_1 = (\delta_n - \omega_*)/\varepsilon$.

Таким образом, анализ системы (27) дает три независимых типа решений, реализующихся в первом порядке малости по ε. Решения первого типа определяют вклад внешнего поля и искажения формы капли в спектр собственных частот капиллярных колебаний капли. Решения второго типа соответствуют резонансу линейного типа при $\delta_n \approx 2\omega_*$, а их появление связано с неоднородностью внешнего поля. Решения третьего типа соответствуют параметрической неустойчивости капиллярных колебаний в переменном электрическом поле при $\delta_n \approx \omega_*$ с инкрементом α_n внутри полосы частот конечной ширины (32).

Несложно видеть, что взаимодействие искажения формы капли, имеющего место из-за наличия в давлении внешнего электрического поля не зависящей от времени компоненты с зависящей от времени компонентой давления, может реализоваться лишь в более высоком порядке теории приближений, чем первый.

5. В заключение следует отметить, что важную роль в раскачке капиллярных колебаний капли переменным во времени внешним воздействием должна играть вязкость жидкости, не учитывавшаяся в проделанном рассмотрении, так как она не сказывается на взаимодействии искажения формы капли в неоднородном поле с переменной во времени его компонентой. Тем не менее можно отметить, что учет вязкости приведет к ограничению амплитуды неустойчивых мод для линейного резонанса (при $\delta_n \approx 2\omega_*$) и появлению порога для раскачки параметрических колебаний (при $\delta_n \approx \omega_*$), как это показано в [2,8,9].

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[2] *Григорьев А.И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 50–55.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
[4] *Нестеров С.В.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 170–172.
[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[7] *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
[8] *Лазарянц А.Э., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 9. С. 33–38.
[9] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 11. С. 49–56.