1996 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 66, N 5

01;03

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА, КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ПО УГЛУ АТАКИ

© Ю.П.Головачев, Н.В.Леонтьева, Ю.М.Липницкий[1]

Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
[1]Центральный научно-исследовательский институт машиностроения,
141070 Калининград, Московская область, Россия
(Поступило в Редакцию 11 января 1995 г.)

Нестационарное течение газа у поверхности колеблющегося затупленного тела рассматривается в нелинейной трехмерной постановке с использованием модели вязкого ударного слоя. Численное решение находится с помощью неявной конечно-разностной схемы постоянного направления. Результаты расчетов демонстрируют влияние нестационарности обтекания на аэродинамические характеристики. Исследуется зависимость нестационарных эффектов от частоты колебаний, чисел Рейнольдса, Маха и температурного фактора.

Введение

Колебания относительно балансировочного угла атаки оказывают существенное влияние на аэродинамические характеристики и устойчивость движения тел, летящих со сверхзвуковой скоростью. Из-за технических трудностей и высокой стоимости натурных и лабораторных экспериментов основным источником информации о нестационарных аэродинамических характеристиках колеблющихся тел при сверхзвуковом обтекании являются теоретические исследования. Такие исследования проводились ранее в рамках моделей идеального газа и пограничного слоя. При этом в большинстве работ анализ существенно упрощался предположениями о малости амплитуды и частоты колебаний тела (см., например, [1–6]).

В настоящей работе предлагается постановка задачи, основанная на модели вязкого ударного слоя. При этом вся возмущенная область между поверхностью тела и головной ударной волной рассчитывается с использованием уравнений динамики вязкого газа без выделения областей невязкого течения пристеночного пограничного слоя. Применение такого подхода существенно упрощает учет вязко-невязкого взаимодействия, что позволяет расширить исследуемый диапазон условий обтекания в сторону течений с бóльшими числами Струхаля и меньшими числами Рейнольдса. Задача решается в нелинейной трехмерной постановке, не содержащей ограничений на значения балансировочного угла атаки, амплитуду и частоту колебаний тела.

Постановка задачи

Рассматривается сверхзвуковое обтекание затупленного тела вращения, ось которого $0X$ составляет угол атаки α с вектором скорости набегающего потока $\mathbf{V}_\infty$, лежащим в плоскости $X0Y$ декартовой системы координат (рис. 1). Тело совершает колебания вокруг оси $0Z$.

Исследуемые течения характеризуются числами Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty \geqslant 10^2$. Поэтому расчеты проводятся с выделением головной ударной волны с использованием упрощенных уравнений Навье-Стокса, которые включают в себя лишь наибольшие из членов, описывающих молекулярный перенос импульса и энергии. Исходные уравнения записываются с использованием вектора относительной скорости газа $\mathbf{V}$ в подвижной криволинейной системе координат, жестко связанной с обтекаемым телом. Криволинейная система координат q^i $(i = 1, 2, 3)$ строится на основе сферической системы (r, θ, ϕ)

$$q^1 = \theta, \quad q^2 = (r - r_w)/(r_s - r_w), \quad q^3 = \phi, \tag{1}$$

где $r = r_w(\theta, \phi)$, $r = r_s(\theta, \phi, t)$ — уравнения поверхностей тела и головной ударной волны.

Для совершенного газа с постоянной теплоемкостью исходная система уравнений в тензорной форме имеет вид

$$\partial\rho/\partial t + (V^j - D^j)\nabla_j\rho + \rho\nabla_j V^j = 0, \tag{2}$$

$$\rho(\partial V^2/\partial t + V^j\nabla_j D^2) + \rho(V^j - D^j)\nabla_j V^2 + g^{2j}\nabla_j p - \rho F^2 = 0, \tag{3}$$

$$\rho(\partial V_i/\partial t - V_j\nabla_i D^j) + \rho(V^j - D^j)\nabla_j V_i + \nabla_i p - \\ - g^{22}\nabla_2(\mu\nabla_2 V_i) - \rho F_i = 0 \quad (i = 1, 3), \tag{4}$$

$$\rho\partial e/\partial t + \rho(V^j - D^j) - \nabla_j e + p\nabla_j V^j - \\ - g^{22}(\nabla_2\lambda\nabla_2 T + \mu\nabla_2 V_j\nabla_2 V^j) = 0. \tag{5}$$

Здесь V_i, V^i — ко- и контравариантные составляющие вектора относительной скорости газа; D^i — контравариантные составляющие вектора скорости системы координат, обусловленной движением головной

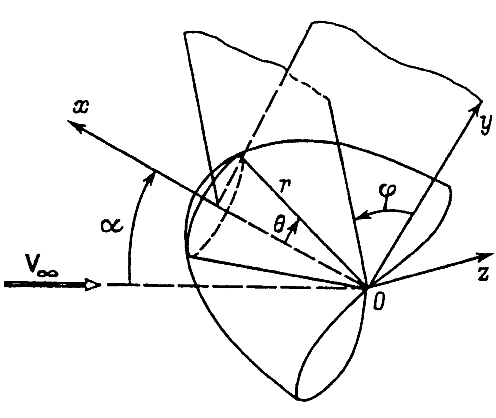

Рис. 1. Схема течения и система координат.

ударной волны; e — удельная внутренняя энергия газа; μ, λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности газа; g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора; F_1, F_2, F_3 — составляющие вектора $\mathbf{F} = \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_c$, представляющего собой сумму переносного ускорения $\mathbf{W}_e$ и ускорения Кориолиса $\mathbf{W}_c$; остальные обозначения общепринятые. В системе (2)–(5) уравнения баланса импульса записаны для ковариантных составляющих по координатам q^1, q^3 и контравариантной составляющей по q^2. Векторные величины задаются их проекциями на оси декартовой системы координат (XYZ). Тензорные составляющие и тензорные производные векторов вычисляются по декартовым составляющим с помощью формул тензорного анализа [7].

Остановимся на вычислении компонент вектора $\mathbf{F}$. В рассматриваемом случае вектор переносной скорости и переносное ускорение определяются формулами

$$\mathbf{V}_e = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{W}_e = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \tag{6}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки; $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости системы координат, жестко связанной с обтекаемым телом.

Ускорение Кориолиса находится по формуле

$$\mathbf{W}_c = 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}). \tag{7}$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{\Omega}$ направлен по оси Z, для декартовых составляющих вектора $\mathbf{F}$ имеем

$$\begin{gathered} F_x = -\ddot{\alpha} r \sin q^1 \cos q^3 - \dot{\alpha}(\dot{\alpha} r \cos q^1 + 2V_y), \\ F_y = \ddot{\alpha} r \sin q^1 - \dot{\alpha}(\dot{\alpha} r \sin q^1 \cos q^3 - 2V_x), \\ F_z = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ — производные по времени от угла атаки $\alpha(t)$; V_x, V_y — проекции вектора относительной скорости газа на оси декартовой системы координат.

Граничные условия задачи формулируются следующим образом. На головной ударной волне используются соотношения Ренкина–Гюгонио, записанные с использованием вектора относительной скорости набегающего потока в связанной с телом системе координат. На поверхности тела все три составляющие вектора относительной скорости газа принимаются равными нулю, температура задается постоянной. Вниз по потоку расчетная область ограничивается поверхностью $q^1 = \pi/2$, на которой используются приближенные условия вида

$$\partial^2 f / \partial (q^1)^2 = 0, \tag{9}$$

соответствующие предположению о достаточной гладкости решения по координате q^1 в окрестности рассматриваемой границы. Предполагается симметрия исследуемого течения относительно плоскости $\phi = 0, \pi$, ограничивающей расчетную область по координате q^3. На этой границе используются условия симметрии. Интегрирование по времени проводится от известного стационарного решения до установления периодического режима обтекания.

Численный метод

Решение задачи получено с помощью метода [8], основные этапы которого состоят в следующем.

В области $0 \leqslant q^1 \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant q^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant q^3 \leqslant \pi$, $t \geqslant 0$ вводится разностная сетка

$$q^1_k = (k - 1/2)\Delta q^1, \quad \Delta q^1 = \pi/2K, \quad k = 1, 2, \ldots, K,$$

$$q^2_l = l\Delta q^2, \quad \Delta q^2 = 1/L, \quad l = 0, 1, \ldots, L,$$

$$q^3_m = (m - 1/2)\Delta q^3, \quad \Delta q^3 = \pi/(M - 1/2), \quad m = 1, 2, \ldots, M;$$

$$t^n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{10}$$

Уравнения (2)–(5) аппроксимируются на сетке (10) с использованием следующих разностных отношений:

$$\frac{\partial z}{\partial t} \sim \frac{1}{\Delta t}(z^n - z^{n-1})_{k,l+1/2,m},$$

$$\frac{\partial z}{\partial q^1} \sim \frac{1}{2\sin\Delta q^1}(z_{k+1} - z_{k-1})^n_{l+1/2,m},$$

$$\frac{\partial z}{\partial q^2} \sim \frac{1}{\Delta q^2}(z_{l+1} - z_l)^n_{k,m},$$

$$\frac{\partial z}{\partial q^3} \sim \frac{1}{2\sin\Delta q^3}(z_{m+1} - z_{m-1})^n_{k,l+1/2},$$

$$\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\gamma\frac{\partial z}{\partial q^2}\right) \sim \frac{1}{2(\Delta q^2)^2}\Big[\gamma_{l+1}(z_{l+2} - z_l) - \gamma_l(z_{l+1} - z_{l-1})\Big]^n_{k,m}, \tag{11}$$

где z, γ — любые сеточные функции.

Заметим, что формулы (11) являются точными в простейших частных случаях однородного и осесимметричного потоков, что устраняет нефизические осцилляции численного решения в окрестности луча $q^1 = 0$ [8].

В результате разностной аппроксимации в каждом внутреннем узле сетки получается система из пяти алгебраических уравнений

$$(H_i)^n_{k,l+1/2,m} = 0, \quad i = 1, \ldots, 5; \quad k = 1, 2, \ldots, K,$$

$$l = 0, 1, \ldots, L; \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{12}$$

Из-за того что уравнения второго порядка (4) и (5) аппроксимируются в узлах с полуцелыми значениями индекса l, система разностных уравнений на каждом луче q^2 вместе с аппроксимациями краевых условий содержит три избыточных уравнения. Анализ обусловленности одномерной разностной задачи на луче показывает, что избыточными и подлежащими исключению являются разностные аналоги уравнений (4) и (5) при $l = 0$.

Значения функций на новом временно́м слое находятся методом последовательных приближений. Вычисляя производные по q^1 и q^3 по результатам предыдущей итерации, в каждом приближении получаем линейную систему алгебраических уравнений, которая распадается на независимые подсистемы на лучах q^2, расположенных поперек ударного слоя. Эти подсистемы решаются прогонкой. Благодаря выбору для вектора скорости ковариантных составляющих по q^1 и q^3, соответствующие уравнения баланса импульса на каждом луче представляют собой независимые скалярные уравнения. Их решение, дающее значения V_1 и V_3, находится скалярными прогонками. Для решения оставшихся трех уравнений применяется векторная прогонка. Таким образом находятся значения функций во всех узлах сетки на рассматриваемом луче, а также скорость движения головной ударной волны. Далее вычисляются декартовы составляющие вектора скорости и уточняется значение отхода головной ударной волны. После выполнения этих вычислений на всех лучах проводится следующая итерация, а при достижении требуемой точности следующий шаг по времени.

Рассмотренная выше конечно-разностная схема обеспечивает второй порядок точности по пространственным координатам и первый по времени. Большинство расчетов выполнено на сетке с числом узлов $K \times L \times M = 24 \times 30 \times 9$. Узлы сгущались к поверхности тела с помощью логарифмического преобразования поперечной координаты q^2. Шаги сетки по направлениям q^1 и q^3 выбирались постоянными. Точность результатов контролировалась сравнением решений, полученных на сетках с различным числом и расположением узлов. Для обсуждаемых ниже результатов она оценивается в 1–2%.

Программа, реализующая рассмотренный выше алгоритм, может использоваться и для расчета сверхзвукового обтекания тупых тел идеальным газом. В этом случае следует задать $\mu = \lambda = 0$, сохранить при $l = 0$ разностные аппроксимации всех уравнений и исключить граничные условия на поверхности тела для температуры и составляющих скорости V_1, V_3. Заметим также, что значительное ускорение счета может быть получено при одновременном выполнении вычислений на лучах с использованием параллельных вычислительных систем.

Результаты расчетов

Обсуждаемые ниже результаты соответствуют обтеканию параболоида вращения, вершина которого размещается на оси X на расстоянии 3.5 радиусов затупления от начала координат (рис. 1). Отношение удельных теплоемкостей газа $\gamma = 1.4$, коэффициент вязкости вычисляется по формуле Сазерленда для воздуха, число Прандтля $\mathrm{Pr} = 0.7$. Число Рейнольдса Re_∞ определяется по параметрам набегающего потока и радиусу затупления тела R.

Без потери общности можно ограничиться рассмотрением гармонических колебаний тела относительно нулевого угла атаки, при которых $\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t)$. Представленные ниже результаты получены при амплитуде изменения угла атаки $\alpha_0 = 5°$.

Остановимся вначале на результатах расчетов аэродинамических характеристик.

На рис. 2–5 представлена зависимость коэффициентов момента тангажа C_m (a), осевой силы C_x ($б$) и нормальной силы C_y ($в$) от чисел

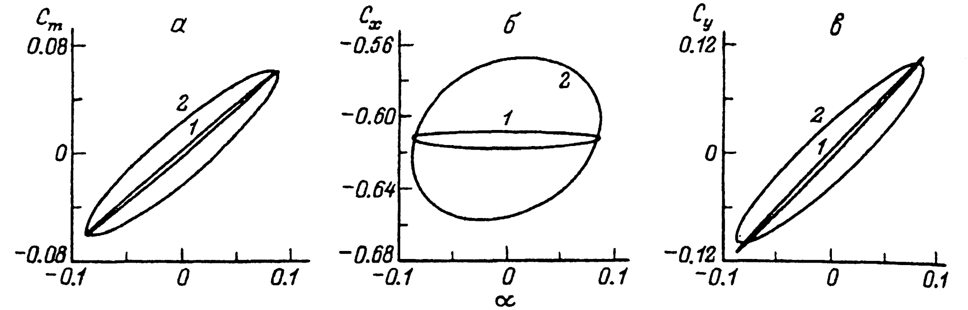

Рис. 2. Влияние числа Струхаля на изменение аэродинамических характеристик.
$M_\infty = 2$, $\mathrm{Re}_\infty = 10^4$, $T_w = 0.56T^*$; Sh: *1* — 0.01, *2* — 0.1.

Струхаля, Рейнольдса, Маха и температурного фактора. Аэродинамические коэффициенты вычислены без учета вклада кормовой части тела. Коэффициент момента C_m вычислен относительно начала координат, число Струхаля $\mathrm{Sh} = \omega R/V_\infty$.

Рис. 2 демонстрирует зависимость аэродинамических характеристик от частоты колебаний тела. Видно, что при $\mathrm{Sh} = 0.1$ обтекание уже является существенно нестационарным.

На рис. 3 представлены результаты, иллюстрирующие влияние разреженности набегающего потока. Здесь сплошные и штриховые линии соответствуют числам Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty = 10^5$ и 10^3. Видно, что влияние разреженности заметно сказывается только на коэффициенте осевой силы C_x, причем, как показывает анализ численных решений, это влияние обусловлено главным образом эффектом вытеснения газа пограничным слоем. Вклад трения в аэродинамические силы и моменты не превышает нескольких процентов даже при $\mathrm{Re}_\infty = 10^3$, убывая с увеличением числа Рейнольдса пропорционально $\mathrm{Re}_\infty^{-1/2}$. Штрихпунктирной линией на рис. 3,*б* нанесены результаты расчета в рамках модели идеального газа. Для коэффициентов C_m и C_y модель идеального газа дает значения, совпадающие с результатами расчета вязкого ударного слоя при $\mathrm{Re}_\infty = 10^5$.

На рис. 4 представлены результаты расчетов аэродинамических характеристик при различных числах Маха M_∞. Сплошными и штри-

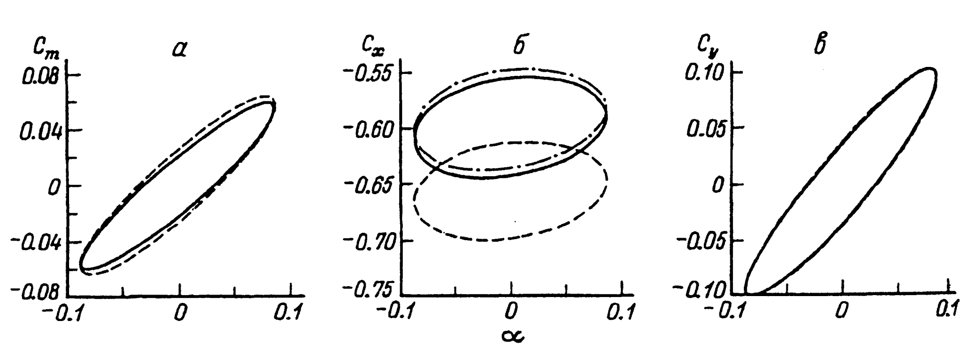

Рис. 3. Влияние числа Рейнольдса на изменение аэродинамических характеристик. ($M_\infty = 2$, $\mathrm{Sh} = 0.1$, $T_w = 0.56T^*$).

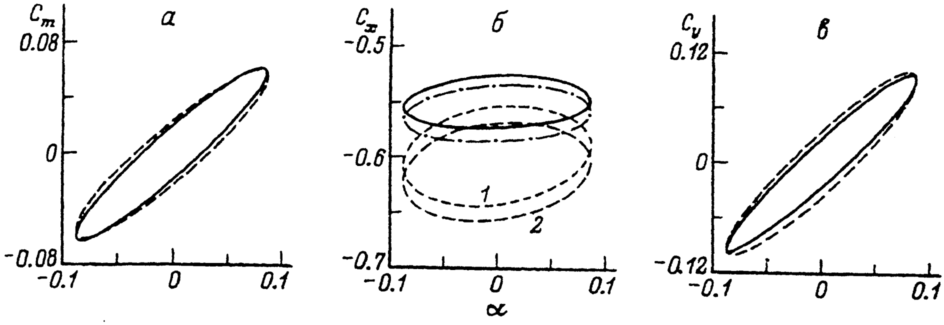

Рис. 4. Влияние числа Маха и температурного фактора на изменение аэродинамических характеристик. ($\mathrm{Re}^* = 1.08\times10^4$, $\mathrm{Sh} = 0.1$).

ховыми линиями нанесены результаты расчетов при $M_\infty = 15$ и 2. Штрихпунктир на рис. 4,*б* соответствует $M_\infty = 6$. Значения коэффициентов C_m и C_y для $M_\infty = 6$ совпадают с рассчитанными для $M_\infty = 15$. Все представленные на рис. 4 результаты соответствуют одному и тому же значению числа Рейнольдса $\mathrm{Re}^* = \rho_\infty V_\infty R/\mu(T^*)$, где T^* — температура торможения набегающего потока. Известно, что при больших сверхзвуковых скоростях использование критерия подобия Re^* исключает зависимость стационарных характеристик обтекания затупленных тел от числа Маха M_∞ [9]. Представленные на рис. 4 результаты подтверждают универсальный характер критерия подобия Re^* и для случая нестационарного обтекания.

Рассмотренные выше результаты были получены при значении температурного фактора $T_w = 0.1T^*$. Для иллюстрации влияния температуры обтекаемой поверхности на аэродинамические характеристики на рис. 4,*б* штриховой линией *2* нанесены значения коэффициента осевой силы при $M_w = 2$, $T_w = 0.56T^*$. Сравнение с результатами расчета при $T_w = 0.1T^*$ (штриховая кривая *1*) показывает некоторое увеличение абсолютного значения C_x при повышении температуры обтекаемой поверхности, что объясняется утолщением пограничного слоя. Влияние температурного фактора на коэффициенты момента и нормальной силы пренебрежимо мало́.

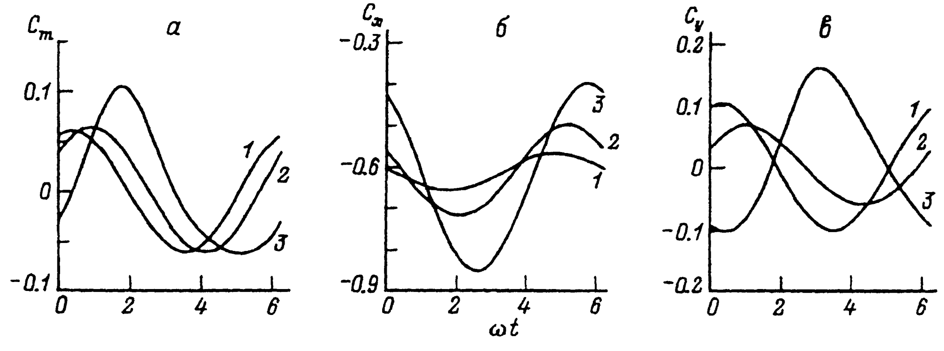

Рис. 5. Изменение аэродинамических характеристик в течение периода колебаний тела.
$M_\infty = 2$, $\mathrm{Re}_\infty = 10^4$, $T_w = 0.56T^*$; Sh: *1* — 0.01, *2* — 0.25, *3* — 0.5.

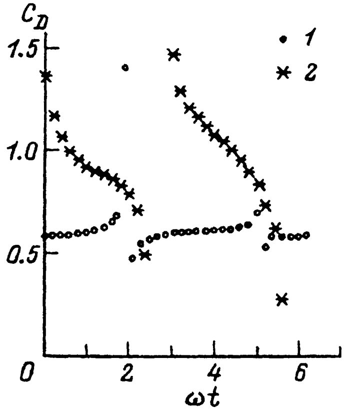

Рис. 6. Изменение коэффициента центра давления в течение периода колебаний тела.
$M_\infty = 2$, $\mathrm{Re}_\infty = 10^4$, $T_w = 0.56T^*$; Sh: *1* — 0.01, *2* — 0.25.

На рис. 5 показано изменение аэродинамических коэффициентов в течение одного периода колебаний тела при разных числах Струхаля. Можно видеть наличие фазового сдвига в изменении аэродинамических коэффициентов по сравнению с изменением угла атаки, причем этот сдвиг увеличивается с увеличением Sh. Интересно отметить возникающую при увеличении числа Струхаля несимметрию изменения коэффициентов C_m и C_y относительно нулевого значения угла атаки, а также немонотонное изменение экстремальных значений C_y с увеличением Sh.

На рис. 6 показано изменение коэффициента центра давления $C_D = C_m/C_y$ при двух значениях числа Струхаля. Видно, во-первых, что нулевое значение коэффициента нормальной силы достигается в более поздние моменты времени по сравнению с нулевым значением угла атаки. С увеличением частоты колебаний тела указанное выше запаздывание увеличивается, а сам коэффициент C_D начинает изменяться в довольно широких пределах, что означает заметное перемещение центра давления по оси тела.

Перейдем теперь к рассмотрению локальных характеристик обтекания. На рис. 7 представлены распределения давления (a), теплового потока ($б$) и коэффициента трения ($в$) по поверхности тела в плоскости симметрии $\phi = 0, \pi$ в моменты времени, когда угол атаки изменяет знак, переходя в область положительных значений (сплошные кривые) и в

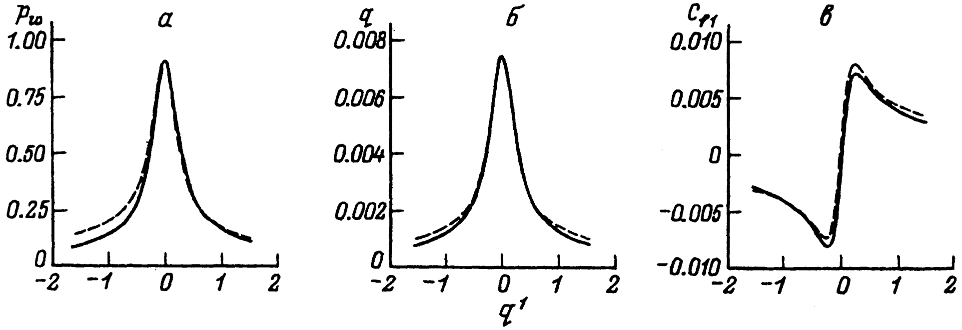

Рис. 7. Распределения давления, теплового потока и коэффициента трения по поверхности тела в плоскости симметрии при нулевом угле атаки.
$M_\infty = 15$, $\mathrm{Re}_\infty = 10^5$, $T_w = 0.1T^*$, $\mathrm{Sh} = 0.1$.

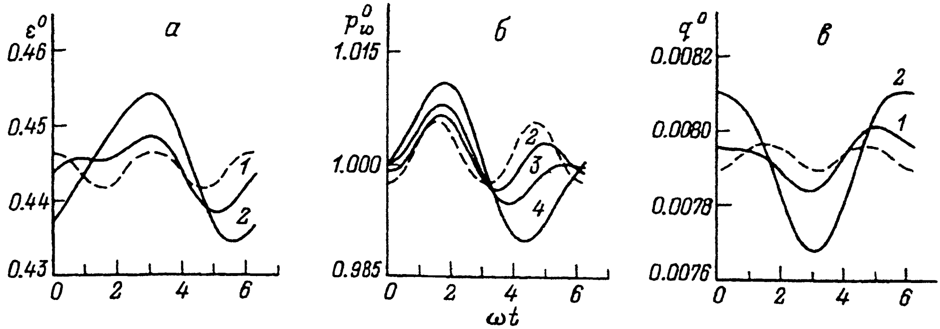

Рис. 8. Изменение локальных характеристик обтекания в течение периода колебаний тела.
$M_\infty = 2$, $\mathrm{Re}_\infty = 10^4$, $T_w = 0.56T^*$; Sh: *1* — 0.05, *2* — 0.1, *3* — 0.15, *4* — 0.2.

область отрицательных значений (штриховые кривые). При этом угловая скорость тела принимает максимальное значение. Положительные значения координаты q^1 соответствуют полуплоскости $\phi = 0$, отрицательные — полуплоскости $\phi = \pi$ (рис. 1). Значения давления, теплового потока и напряжения трения отнесены к $\rho_\infty V_\infty^2$, $\rho_\infty V_\infty^3$ и $\rho_\infty V_\infty^2/2$.

Рис. 8 демонстрирует изменение характера временно́й зависимости локальных характеристик обтекания при увеличении частоты колебаний тела. Здесь показано изменение отхода головной ударной волны (*а*), давления (*б*) и теплового потока (*в*) в вершине параболоида в течение одного периода колебаний тела при различных числах Струхаля. Штриховыми линиями представлены результаты для квазистационарного режима обтекания. В этом случае период изменения указанных характеристик равен половине периода колебаний тела. С увеличением частоты колебаний возникает фазовый сдвиг и период изменения локальных характеристик обтекания становится постепенно равным периоду колебаний тела. При этом значения рассматриваемых характеристик обтекания зависят уже не только от абсолютной величины угла атаки, но и от его знака. Для отхода головной ударной волны и теплового потока отмеченные изменения происходят при меньших числах Струхаля, чем для давления. Они отражаются и на изменении суммарных аэродинамических характеристик (рис. 5). Несмотря на очевидную эвивалентность двух полупериодов колебаний тела с точки

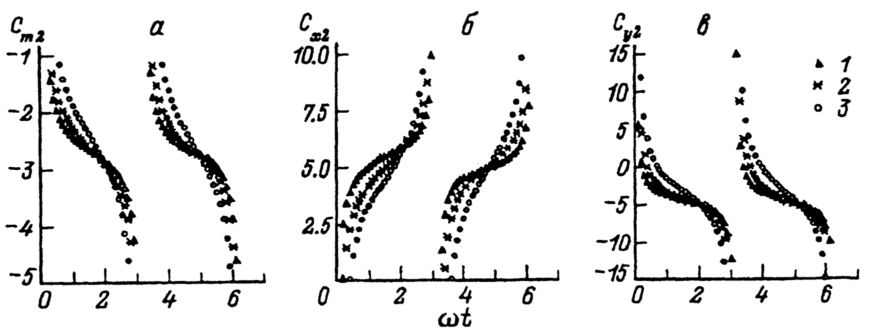

Рис. 9. Изменение коэффициентов линейного приближения (13) в течение периода колебания тела.
$M_\infty = 2$, $\mathrm{Re}_\infty = 10^4$, $T_w = 0.56T^*$; Sh: *1* — 0.05, *2* — 0.1, *3* — 0.5.

зрения условий обтекания при установившемся периодическом режиме, во всех расчетах разность значений аэродинамических характеристик при соответственных положительных и отрицательных значениях угла атаки оказывалась одного знака. Такой результат был получен на сетках с различным числом и расположением плоскостей $\phi = \text{const}$ при различных начальных условиях. Отмеченная особенность может объясняться нарушением симметрии исследуемого течения относительно плоскости $\phi = 0, \pi$, возможность которого не учитывалась в расчетах.

Решение задачи в нелинейной постановке позволяет оценить погрешность широко используемой линейной теории, в которой аэродинамические характеристики тела, колеблющегося относительно нулевого угла атаки, представляются в виде

$$C = C_0 + \alpha C_1 + \dot{\alpha} C_2, \tag{13}$$

где C_0 соответствует осесимметричному стационарному обтеканию, второй член в правой части дает поправку на пространственный характер обтекания в предположении квазистационарности, третий член учитывает нестационарные эффекты.

На рис. 9 показано изменение в течение периода колебаний тела коэффициентов C_{m2} (*а*), C_{x2} (*б*) и C_{y2} (*в*), полученных вычитанием из решения нелинейной трехмерной задачи результатов расчета квазистационарного обтекания и делением разности на $\dot{\alpha}$. Расслоение кривых по числам Струхаля характеризует погрешность линейной теории.

Заключение

Выполненные в нелинейной трехмерной постановке расчеты нестационарного сверхзвукового обтекания колеблющегося затупленного тела дают количественное представление о границах применимости квазистационарного и линейного приближений. Результаты расчетов дают также оценки вкладов давления и поверхностного трения в аэродинамические характеристики и демонстрируют зависимость этих характеристик от чисел Струхаля, Рейнольдса, Маха и температурного фактора. Дальнейшего исследования требует вопрос о возможном нарушении симметрии течения относительно плоскости, содержащей вектор скорости набегающего потока.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 93-02-14797).

Список литературы

[1] *Carrier G.F.* // JAS. 1949. V. 16. N 3.
[2] *King W.S.* // AIAA J. 1966. N 6. P. 994–1001.
[3] *Телегин Г.Ф., Липницкий Ю.М.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 4. С. 19–29.
[4] *Орлик-Рюнеманн К.Дж.* // Ракетная техника и космонавтика. 1972. № 9. С. 5–7.
[5] *Белоцерковский О.М., Головачев Ю.П., Грудницкий В.Г.* и др. М.: Наука, 1974.
[6] *Липницкий Ю.М., Платонов В.А., Покровский А.Н., Сиренко В.Н., Шманенков В.Н.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 3. С. 53–58.
[7] *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.
[8] *Карякин В.Е., Попов Ф.Д.* // ЖВМиМФ. 1977. Т. 17. № 6. С. 1545–1555.
[9] *Гусев В.Н.* // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 142–152.