

# Орбитальный магнитный момент квантовой ямы и квантовой точки в скрещенных магнитном и электрическом полях

© В.А. Маргулис, В.А. Мионов

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,  
Саранск, Россия

E-mail: theorphysics@mrsu.ru

(Поступила в Редакцию 29 июня 2009 г.

В окончательной редакции 14 сентября 2009 г.)

Предсказан новый физический эффект — осцилляции орбитального магнитного момента с изменением напряженности электрического поля в двух типах наноструктур. Получены явные аналитические выражения для орбитального магнитного момента квантовой ямы и квантовой точки в скрещенных магнитном и электрическом полях. Исследованы осцилляции орбитального магнитного момента при изменении электрического и магнитного полей. Найдены периоды осцилляций как в магнитном, так и в электрическом поле, рассмотрены предельные случаи сильного магнитного и размерного квантования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-02-01035).

## 1. Введение

Электрические поля обуславливают самые разнообразные явления в полупроводниках. Они вызывают качественные изменения квантовых состояний носителей тока и их энергетического спектра. Это приводит к зависимости макроскопических свойств полупроводников от приложенного поля  $\mathbf{E}$ . Примерами таких явлений могут служить: эффект Франца–Келдыша — зависимость комплексной диэлектрической проницаемости от  $\mathbf{E}$ , возникающая из-за возможности собственного поглощения фотонов с энергией, меньшей, чем ширина запрещенной зоны [1]; эффект Есаки — туннельный ток в вырожденном  $p$ – $n$ -переходе [2]; квантовый эффект Холла [3] и др.

В работе [4] получены матричные элементы для оптических переходов в квантовых ямах с прямоугольным и треугольным потенциалами конфайнмента во внешних электрическом и магнитном полях. В [5] изучалось внутризонное поглощение света в параболической квантовой яме в скрещенных магнитном и электрическом полях (холловская конфигурация) и было показано, что с ростом напряженности электрического поля поглощение уменьшается. В [6] исследовался электронный спектр двумерной системы связанных квантовых точек. В работе [7] изучался электронный газ в конечной параболической квантовой яме, находящейся в скрещенных магнитном и электрическом полях. Было показано, что при определенных значениях приложенных полей эта система может моделировать двойную квантовую яму.

Ранее были исследованы магнитные свойства различных наноструктур. Например, в [8] изучался магнитный момент трехмерной квантовой ямы. Магнитная восприимчивость квазидвумерной системы в наклонном магнитном поле рассматривалась в [9], и было показано, что в случае вырожденного электронного газа возникают осцилляционные максимумы восприимчивости.

Целью настоящей работы является аналитическое и численное исследование орбитального магнитного момента квантовой ямы и квантовой точки от напряженности электрического поля при постоянном химическом потенциале.

## 2. Орбитальный магнитный момент

Рассмотрим бесспиновый электронный газ в квантовой яме, образованной параболическим удерживающим потенциалом. Гамильтониан такой системы, помещенной в скрещенные магнитное  $\mathbf{B}$  и электрическое  $\mathbf{E}$  поля, имеет вид

$$H^W = \frac{1}{2m^*} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{m^* \omega_0^2}{2} z^2 + e \mathbf{E} \mathbf{r}, \quad (1)$$

где  $m^*$  — эффективная масса электрона,  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал магнитного поля,  $\omega_0$  — характеристическая частота параболического потенциала. Направим электрическое поле вдоль оси  $z$ , т.е.  $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ , а магнитное поле под углом  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < \pi/2$ ) к направлению оси  $z$  в плоскости  $xz$ , т.е.  $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)$ . Тогда векторный потенциал удобно выбрать в виде  $\mathbf{A} = (-B_z y, 0, B_x y)$ . Используя линейное преобразование координат и результаты работы [10], найдем спектр гамильтониана (1)

$$E_{n,m}^W = \hbar \omega_1 \left( n + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_2 \left( m + \frac{1}{2} \right) - \frac{e^2 E^2}{2m^* \omega_0^2}, \quad (2)$$

где  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\omega_{1,2}$  — гибридные частоты,

$$\omega_{1,2} = \left[ \frac{\omega_c^2 + \omega_0^2}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\omega_c^2 + \omega_0^2}{2} \right)^2 - \omega_c^2 \omega_0^2 \cos^2 \alpha} \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Спектр (2) является вырожденным, с кратностью вырождения [10]  $D = e B_z / (\pi \hbar c) = m^* \omega_c \cos \alpha / (\pi \hbar)$  на

единицу площади, занимаемой электронным газом,  $\omega_c = e|\mathbf{B}|/(m^*c)$  — циклотронная частота.

Теперь рассмотрим симметричную квантовую точку в плоскости  $xy$ , помещенную в скрещенные магнитное и электрическое поля. Энергия системы, связанная с движением вдоль направления оси  $z$ , квантуется, и система находится на нижнем энергетическом уровне  $\varepsilon_1$ . На размер точки в этом направлении  $L_z$  наложим ограничение  $2\hbar^2\pi^2/(m^*L_z^2) > \mu$ , где  $\mu$  — химический потенциал. Это ограничение соответствует незаполненному второму уровню  $\varepsilon_2$  размерного квантования. Предположим также, что температура  $T \ll \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ . Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H^D = \frac{1}{2m^*} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{m^*\omega_0^2}{2} (x^2 + y^2) + e\mathbf{E}\mathbf{r}. \quad (4)$$

Направим электрическое поле под углом к оси  $x$ , т.е.  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ , а магнитное поле перпендикулярно плоскости, в которой расположена квантовая точка ( $B \parallel z$ ). Выберем векторный потенциал в симметричной калибровке  $\mathbf{A} = (B/2)(-y, x, 0)$ . Используя линейное каноническое преобразование фазового пространства [11], найдем спектр гамильтониана (4)

$$E_{n,m}^D = \hbar\omega_1 \left( n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left( m + \frac{1}{2} \right) - \frac{e^2 E^2}{2m^*\omega_0^2}, \quad (5)$$

где  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ , гибридные частоты в (5) имеют вид  $\omega_{1,2} = (\omega \pm \omega_c)/2$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_0^2}$ . Отметим, что в отличие от предыдущей системы электронные энергетические уровни (5) не являются вырожденными ( $D = 1$ ). Из (2) и (5) видно, что электрическое поле не влияет на гибридные частоты, а только приводит к сдвигу уровней.

Магнитный момент  $\mathbf{M}$  при постоянном химическом потенциале  $\mu$  будем искать по стандартной формуле  $\mathbf{M} = -(\partial\Omega/\partial\mathbf{B})_{\mu,T}$ , где  $\Omega$  — термодинамический потенциал, который можно вычислить с помощью классической статсуммы, пользуясь методом работ [8,12]. Отметим, что вектор магнитного момента квантовой ямы будет иметь две составляющие  $\mathbf{M}^W = (M_{\parallel}, 0, M_{\perp})$ , где  $M_{\perp} = M^W/\cos\alpha$ ,  $M_{\parallel} = M^W/\sin\alpha$ ,  $M^W = -(\partial\Omega/\partial\mathbf{B})_{\mu,T}$  — магнитный момент вдоль направления магнитного поля. Для квантовой точки вектор момента имеет вид  $\mathbf{M}^D = (0, 0, M^D)$ .

Орбитальный магнитный момент обеих систем вдоль направления поля  $\mathbf{B}$  представим в виде суммы монотонной по магнитному полю и осциллирующей частей,  $M = M_{\text{мон}} + M_{\text{осц}}$ . Монотонная часть магнитного момента для квантовой ямы и квантовой точки имеет соответственно вид

$$\frac{M_{\text{мон}}^W}{\mu_B^*} = -\frac{m^*\omega_c(\mu + \varepsilon_0)}{6\pi\hbar^2\omega_0}, \quad (6)$$

$$\frac{M_{\text{мон}}^D}{\mu_B^*} = -\frac{\omega_c(\mu + \varepsilon_0)}{6\hbar\omega_0^2}, \quad (7)$$

где  $\mu_B^* = e\hbar/(2m^*c)$  — эффективный магнетон Бора,  $\varepsilon_0 = e^2 E^2/(2m^*\omega_0^2)$ . Подчеркнем, что монотонная часть

магнитного момента квантовой ямы (6) отнесена к единице площади.

Осциллирующую часть  $M_{\text{осц}}$  представим в виде суммы двух членов  $M_i$  ( $i = 1, 2$ )

$$\frac{M_{\text{осц}}}{\mu_B^*} = \frac{T}{\hbar} (M_1 + M_2). \quad (8)$$

Для осциллирующей части магнитного момента квантовой ямы слагаемые из (8) имеют вид

$$\begin{aligned} M_{1,2}^W = & -\frac{m^* \cos\alpha}{\hbar} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \sin[2\pi n(\varepsilon_0 + \mu)/(\hbar\omega_{1,2})]}{\text{sh}[2\pi^2 nT/(\hbar\omega_{1,2})] \sin(\pi n\omega_{2,1}/\omega_{1,2})} \\ & \times \left[ \frac{1}{\pi n} \pm 2 \frac{\varepsilon_0 + \mu}{\hbar\omega_{1,2}} \frac{\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \text{ctg}[2\pi n(\varepsilon_0 + \mu)/(\hbar\omega_{1,2})] \right. \\ & \left. \mp \frac{\omega_{2,1}}{\omega_{1,2}} \frac{\omega_0^2 - \omega_c^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \text{ctg}[\pi n\omega_{2,1}/\omega_{1,2}] \right], \end{aligned} \quad (9)$$

а для квантовой точки

$$\begin{aligned} M_{1,2}^D = & \frac{2\pi}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin[2\pi n(\varepsilon_0 + \mu)/(\hbar\omega_{1,2})]}{\text{sh}[2\pi^2 nT/(\hbar\omega_{1,2})] \sin(\pi n\omega_{2,1}/\omega_{1,2})} \\ & \times \left[ \pm \frac{\varepsilon_0 + \mu}{\hbar\omega_{1,2}} \text{ctg}[2\pi n(\varepsilon_0 + \mu)/(\hbar\omega_{1,2})] \right. \\ & \left. \mp \frac{\omega_0^2 \mp \omega_c\omega_{2,1}}{\omega_0^2} \text{ctg}[\pi n\omega_{2,1}/\omega_{1,2}] \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Осциллирующая часть магнитного момента квантовой ямы (9) (так же как и монотонная часть) вычисляется на единицу площади.

Из (9) и (10) видно, что в общем случае период осцилляций орбитального магнитного момента рассматриваемых систем зависит как от магнитного, так и от электрического поля. Периоды осцилляций орбитального магнитного момента квантовой ямы и квантовой точки по квадрату напряженности электрического поля для первого и второго слагаемых (8) имеют соответственно вид

$$(\Delta E^2)_{1,2} = \frac{2m^*\omega_0^2\hbar\omega_{1,2}}{e^2}. \quad (11)$$

Рассмотрим два предельных случая: сильное магнитное квантование ( $\omega_c \gg \omega_0$ ) и сильное размерное квантование ( $\omega_c \ll \omega_0$ ).

В случае сильного размерного квантования мы можем разложить частоты  $\omega_{1,2}$  в ряд по степеням  $\omega_c^2/\omega_0^2$ . Так, для квантовой ямы получим

$$\omega_1 \simeq \omega_0 \left( 1 + \frac{\omega_c^2 \sin^2 \alpha}{2\omega_0^2} \right),$$

$$\omega_2 \simeq \omega_c \cos \alpha \left( 1 - \frac{\omega_c^2 \sin^2 \alpha}{2\omega_0^2} \right). \quad (12)$$

В этом случае из (11) следует, что  $(\Delta E^2)_1 \gg (\Delta E^2)_2$ ; значит, период осциллирующей орбитальной магнитной моменты квантовой ямы определяется выражением

$$(\Delta E^2)^W = \frac{2m^* \omega_0^2 \hbar \omega_c \cos \alpha}{e^2}. \quad (13)$$

В противоположном случае (когда магнитное квантование много больше, чем размерное)  $\omega_{1,2}$  можно разложить в ряд по степеням  $\omega_0^2/\omega_c^2$

$$\begin{aligned} \omega_1 &\simeq \omega_c \left( 1 + \frac{\omega_0^2 \sin^2 \alpha}{2\omega_c^2} \right), \\ \omega_2 &\simeq \omega_0 \cos \alpha \left( 1 - \frac{\omega_0^2 \sin^2 \alpha}{2\omega_c^2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда  $(\Delta E^2)_1 \gg (\Delta E^2)_2$  и период осцилляций магнитного момента ямы определяется как

$$(\Delta E^2)^W = \frac{2m^* \hbar \omega_0^3 \cos \alpha}{e^2}. \quad (15)$$

Аналогично исследуем периоды осцилляций по квадрату напряженности электрического поля орбитального магнитного момента квантовой точки в различных предельных случаях. Так, в слабых магнитных полях  $\omega_c \ll \omega_0$  гибридные частоты равны  $\omega_1 \simeq \omega_0 + \omega_c/2$ ,  $\omega_2 \simeq \omega_0 - \omega_c/2$ . Тогда из (11) следует, что  $(\Delta E^2)_1 \simeq (\Delta E^2)_2$ , поэтому

$$(\Delta E^2)^D = \frac{2m^* \hbar \omega_0^3}{e^2}. \quad (16)$$

В сильных магнитных полях ( $\omega_c \gg \omega_0$ )  $\omega_1 \simeq \omega_c$ ,  $\omega_2 \simeq \omega_0^2/\omega_c$ , поэтому  $(\Delta E^2)_1 \gg (\Delta E^2)_2$ , тогда период равен

$$(\Delta E^2)^D = \frac{2m^* \hbar \omega_0^4}{e^2 \omega_c}. \quad (17)$$

Анализ (9) показывает, что в обоих предельных случаях орбитальный магнитный момент квантовой ямы является периодическим по обратному магнитному полю. В слабых полях период равен

$$\left( \Delta \frac{1}{B} \right)^W = \frac{e \hbar \cos \alpha}{m^* c (\varepsilon_0 + \mu)}, \quad (18)$$

а в сильных магнитных полях период определяется выражением

$$\left( \Delta \frac{1}{B} \right)^W = \frac{e \hbar}{m^* c (\varepsilon_0 + \mu)}. \quad (19)$$

Орбитальный магнитный момент квантовой точки является периодическим (только в случае сильного магнитного квантования) по обратному полю с периодом

$$\left( \Delta \frac{1}{B} \right)^D = \frac{e \hbar}{m^* c (\varepsilon_0 + \mu)}. \quad (20)$$

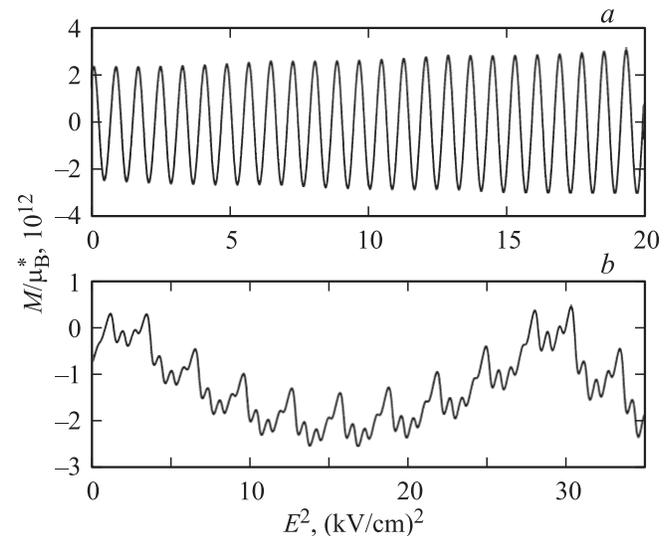
### 3. Обсуждение

Как следует из предыдущего раздела, вклад в орбитальный магнитный момент квантовой ямы и квантовой точки дают один линейный по магнитному полю и два осциллирующих слагаемых. Отметим, что аналогичная ситуация имеет место и для квазиодномерной наноструктуры в наклонном магнитном поле [12]. Из (7) и (6) следует, что монотонная часть зависит от квадрата напряженности электрического поля.

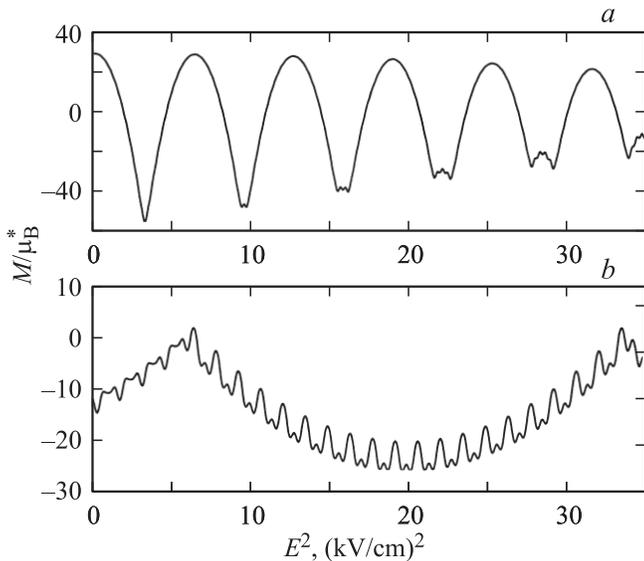
Орбитальный магнитный момент рассматриваемых структур периодичен по квадрату величины электрического поля. Это обстоятельство и приводит к его осцилляциям от напряженности электрического поля. В случае сильного размерного квантования  $\omega_c \ll \omega_0$  и сильного магнитного квантования период осцилляций магнитного момента квантовой ямы определяется только второй компонентой  $M_2^W$  из (8). Это объясняется тем, что период первой осциллирующей компоненты много больше, чем у второй. Поэтому период орбитального магнитного момента ямы в слабых магнитных полях определяется выражением (13) (рис. 1, *a*), а в случае сильных полей — формулой (15) (рис. 1, *b*).

В области слабых полей осциллирующие слагаемые орбитального магнитного момента квантовой точки имеют одинаковый период (16) по электрическому полю, а в случае сильного магнитного квантования, так же как и для квантовой ямы, магнитный момент определяется вторым осциллирующим слагаемым, который имеет период, равный (17) (рис. 2).

Из (15) и (16) видно, что периоды осцилляций не зависят от магнитного поля, а определяются только



**Рис. 1.** Зависимости от электрического поля орбитального магнитного момента квантовой ямы вдоль направления магнитного поля в единицах  $\mu_B^*$ . *a* — случай слабого магнитного поля,  $B = 0.5$  Т; *b* — случай сильного магнитного поля,  $B = 8$  Т.  $\omega_0 = 5 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$ ,  $T = 0.5$  К,  $\mu = 10^{-13} \text{ erg}$ ,  $m^* = 0.067m_0$  ( $m_0$  — масса свободного электрона),  $\alpha = \pi/3$ .



**Рис. 2.** Зависимости орбитального магнитного момента квантовой точки от электрического поля. *a* — случай слабого магнитного поля,  $B = 0.1$  Т; *b* — случай сильного магнитного поля,  $B = 8$  Т,  $\omega_0 = 5 \cdot 10^{12}$  с $^{-1}$ ,  $T = 0.5$  К,  $\mu = 10^{-13}$  эрг,  $m^* = 0.067m_0$ .

параметрами системы. Поэтому их удобно использовать для экспериментального определения параметров потенциала конфайнмента рассмотренных систем.

Орбитальный магнитный момент квантовой ямы в обоих предельных случаях испытывает периодические осцилляции по  $1/B$  типа де Газа–ван Альфена. Как показывает анализ, в случае сильного размерного квантования основной вклад в момент дает вторая осцилляционная компонента в  $M_{\text{osc}}$ , период которой определяется выражением (18). В противоположном случае основной вклад дает первая компонента, период которой равен (19). Магнитные осцилляции квантовой точки имеют такой же характер, как и для квантовой ямы, но они периодически осциллируют по обратному полю только в случае сильного магнитного квантования.

Отметим, что результаты экспериментальных исследований оптических свойств широких квантовых ям находятся в хорошем согласии с теоретической моделью параболической квантовой ямы [13–15]. Для типичных параметров параболической квантовой ямы, созданной в слое GaAs/Al $_x$ Ga $_{1-x}$ As, при толщине ямы 1000 Å шаг пространственного квантования для электронов  $\hbar\omega_0 = 14.6$  meV [16]. В этом случае можно оценить периоды осцилляций по квадрату напряженности электрического поля для квантовой ямы при  $\alpha = \pi/3$ . В случае сильного размерного квантования из формулы (13) получим  $(\Delta E^2)^W \simeq 32.4$  (kV/cm) $^2$  при  $B = 1$  Т, а для сильного магнитного квантования (формула (15)) —  $(\Delta E^2)^W \simeq 273.6$  (kV/cm) $^2$ . При концентрации электронов в яме  $n_s \sim 5 \cdot 10^{12}$  см $^{-2}$  и значении электрического поля  $E \sim 20$  kV/cm найдем из (18) пе-

риод по  $1/B$  орбитального магнитного момента ямы при слабых магнитных полях  $[\Delta(1/B)]^W \simeq 0.012$  Т $^{-1}$ , а в случае сильных полей (формула (19)) —  $[\Delta(1/B)]^W \simeq 0.024$  Т $^{-1}$ .

Во многих случаях экспериментальные измерения спектра поглощения квантовых точек в дальней инфракрасной области достаточно хорошо подтверждают предположение о том, что точку можно моделировать параболическим потенциалом [17]. В работе [18] экспериментально исследовались транспортные свойства квантовой точки, сформированной на поверхности двумерного электронного газа. Было показано, что параболический потенциал, соответствующий  $\hbar\omega_0 = 1$  meV, хорошо моделирует реальную квантовую точку. Поэтому мы можем оценить периоды осцилляций орбитального магнитного момента по квадрату напряженности электрического поля как в случае сильного размерного квантования (формула (16)) —  $(\Delta E^2)^D \simeq 0.18$  kV/cm, так и в случае сильного магнитного квантования при  $B = 5$  Т (формула (17)) —  $(\Delta E^2)^D \simeq 0.02$  kV/cm. Если в квантовой точке находится порядка нескольких десятков электронов, что соответствует  $\mu \sim 10^{-14}$  эрг и значению внешнего электрического поля  $E \sim 1$  kV/cm, то можно оценить из (20) период осцилляций орбитального магнитного момента точки  $[\Delta(1/B)]^D \simeq 0.14$  Т $^{-1}$ .

Следует отметить, что для наблюдения осцилляций необходимо, чтобы выполнялись два условия. Ширина уровней энергии должна быть много меньше, чем расстояние между соседними уровнями:  $T \ll \hbar\omega_2$ , так как  $\omega_1 > \omega_2$ . Также уровни энергии не должны быть сильно размыты рассеянием, т.е.  $\hbar/\tau \ll \hbar\omega_2$ , где  $\tau$  — среднее время столкновений электронов.

В окрестности точек, где  $\omega_1/\omega_2$  и  $\omega_2/\omega_1$  являются целыми числами, итоговые формулы для  $M_{\text{osc}}$  оказываются неприменимыми, так как знаменатели в рядах Фурье становятся малыми. Эта проблема обсуждалась в [8,19]; было показано, что ряды в (9) и (10) сходятся к аналитической функции с вероятностью, равной единице.

## Список литературы

- [1] А.И. Ансельм. Введение в теорию полупроводников. Наука, М. (1978). 615 с.
- [2] L. Esaki. Phys. Rev. Lett. **8**, 4 (1962).
- [3] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper. Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [4] A.G. Petrov, A. Shik. Phys. Rev. B **48**, 11 883 (1993).
- [5] Э.П. Синявский, С.М. Соковнич. ФТП **33**, 828 (1999).
- [6] E. Munoz, Z. Barticevic, M. Pacheco. Phys. Rev. B **71**, 165 301 (2005).
- [7] L.G. Guimaraes, R.B. Santiago. J. Phys.: Cond. Matter **10**, 9755 (1998).
- [8] L.I. Filina, V.A. Geyler, V.A. Margulis, O.B. Tomilin. Phys. Lett. A **244**, 295 (1998).
- [9] В.А. Гейлер, В.А. Маргулис, А.Г. Несмелов, И.И. Чучаев. ФТП **36**, 1994 (1994).

- [10] R. Merlin. *Solid State Commun.* **64**, 99 (1987).
- [11] И.А. Малкин, В.И. Манько. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. Наука, М. (1979). 320 с.
- [12] В.А. Гейлер, В.А. Маргулис, О.Б. Томилин. Письма в ЖЭТФ **63**, 549 (1996).
- [13] J.H. Burnett, H.M. Gheong, W. Paul, P.F. Hopkins, A.C. Gossard. *Phys. Rev. B* **48**, 7940 (1993).
- [14] M. Fritze, W. Chen, A.V. Nurmikko, J. Jo, M. Santos, M. Sheygan. *Phys. Rev. B* **48**, 15 103 (1993).
- [15] J.H. Burnett, H.M. Cheong, W. Paul, P.F. Hopkins, E.G. Gwinn, A.J. Rimberg, R.M. Westervelt. *Phys. Rev. B* **43**, 12033 (1991).
- [16] Э.П. Синявский, С.М. Соковнич. ФТТ **42**, 1685 (2000).
- [17] S.M Reimann, M. Manninen. *Rev. Mod. Phys.* **74**, 1283 (2002).
- [18] J. Kyriakidis, M. Pioro-Ladriere, M. Ciorga, A.S. Sachrajda, P. Hawrylak. *Phys. Rev. B* **66**, 035 320 (2002).
- [19] V.A. Geyley, V.A. Margulis. *Phys. Rev. B* **55**, 2543 (1997).