1996 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 66, в. 8
1996 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 66, N 8

01;07;08;09

О РЕШЕНИИ ДВУХМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© *В.А.Карпенко*

Институт прикладной оптики АН Белоруссии,
212793 Могилев, Белоруссия
(Поступило в Редакцию 28 июля 1995 г.)

Двухмерная задача на собственные значения и собственные функции, принадлежащие дискретному спектру, приближенно сведена к одномерной задаче для случая, когда потенциал $\varepsilon(x, y)$ представим в виде $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_1(x)$ при $|y| > b$, $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_2(x)$ при $|y| \leqslant b$. Установлена связь принятого нулевого приближения с результатом метода самосогласованного поля.

Введение

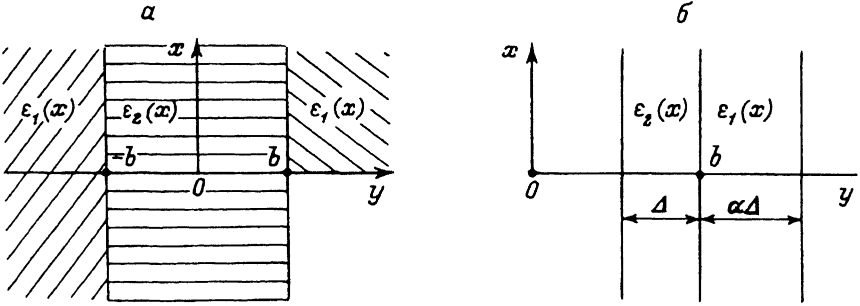
Двухмерное стационарное уравнение Шредингера

$$\left(\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \mu\varepsilon(x, y) - \lambda\right)\varphi(x, y) = 0 \tag{1}$$

с постоянными параметрами μ и λ может описывать каналирование частиц в поле потенциала $\varepsilon(x, y)$, а также каналирование упругих и электромагнитных волн в неоднородных средах [1–3]. В этой связи практический интерес представляют решения уравнения (1), принадлежащие дискретному спектру собственных значений λ.

Ниже излагается приближенная процедура построения таких решений для потенциала специального вида $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_1(x)$ при $|y| > b$, $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_2(x)$ при $|y| \leqslant b$ (см. рисунок,*a*). В теории оптических волноводов, например, указанная зависимость потенциала от координат описывает класс планарных волноводов конечной ширины (прямоугольных в однородной среде, на подложке или внедренных в нее гребневых) и планарных волноводов, нагруженных полоской, и др.

Для прямоугольной потенциальной ямы $\varepsilon_1(x) \equiv 0$, $\varepsilon_2(x) = \text{const}$ при $|x| \leqslant a$, $\varepsilon_2(x) = 0$ при $|x| > a$ известны численные методы [3–5] решения уравнения (1). В данной работе основная идея решения заключается в приближенном сведении уравнения (1) к одномерной задаче. Она осуществляется с помощью метода частичных областей и вариационного



Схематическое распределение потенциала в плоскости (x, y), где вертикальные прямые $y = \pm b$ являются граница частичных областей (*а*), и изображение полоски, включающей границу раздела частичных областей $y = b$ (*б*).

принципа. В ряде частных случаев $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$, в том числе для прямоугольной потенциальной ямы, одномерная задача имеет аналитические решения. Для общего случая $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ показано, что вычисление собственного значения λ в принятом нулевом приближении совпадает с его вычислением методом самосогласованного поля [6].

Формулировка задачи

Исходная идея решения уравнения (1) заключается в нахождении общих представлений искомой функции $\varepsilon(x, y)$ в частичных областях и в последующем согласовании этих представлений на соответствующих границах раздела. Для нахождения упомянутых представлений воспользуемся методом разделения переменных. Для центральной частичной области $|y| < b$, учитывая свойство симметрии потенциала $\varepsilon(x, y) = \varepsilon(x, -y)$, положим

$$\varphi(x, y) = \varphi^{(2)}(x) \begin{Bmatrix} \cos vy \\ \sin vy \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Тогда из (1) следует, что

$$\Big[\nabla_x^2 + \mu\varepsilon_2(x) - (\lambda + v^2)\Big]\varphi^{(2)}(x) = 0. \tag{3}$$

Решения $\varphi^{(2)}(x)$, принадлежащие действительным собственным значениям $\lambda + v^2$, образуют полный набор ортогональных функций. Поэтому из парциальных решений (2) можно образовать общее представление искомой функции при $|y| < b$

$$\varphi(x, y) = \sum_n a_n^{(2)} \varphi_n^{(2)}(x) \begin{Bmatrix} \cos v_n y / \cos v_n b \\ \sin v_n y / \sin v_n b \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Аналогично для боковых частичных областей $|y| > b$ можно записать

$$\varphi(x, y) = \sum_m a_m^{(1)} \varphi_m^{(1)}(x) \exp\Big[-w_m(|y| - b)\Big], \tag{5}$$

где функции $\varphi_m^{(1)}(x)$ являются решениями уравнения

$$\left[\nabla_x^2 + \mu\varepsilon_1(x) - (\lambda - w_m^2)\right]\varphi_m^{(1)}(x) = 0. \tag{6}$$

Следует отметить, что $\varphi_n^{(2)}(x)$ и $\varphi_m^{(1)}(x)$ могут принадлежать как дискретному, так и непрерывному спектрам собственных значений. Поэтому запись выражений (4), (5) является условной, подразумевающей как суммирование, так и интегрирование. Кроме того, использование разложений (4), (5) в конкретных расчетах имеет смысл в том случае, когда решения уравнений (3), (6) известны в аналитическом виде. Это условие выполняется, в частности, для кусочно-постоянных функций $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$, а также для некоторых непрерывных функций, представленных в работе [7]. Поэтому параметры v_n и w_m, входящие в разложения (4), (5), предполагаются известными функциями собственного значения λ.

Покажем теперь, что волновая функция $\varphi(x) = \varphi(x, b)$ на границе частичных областей $y = b$ определяет соответствующее решение задачи (1). Коэффициенты разложений (4), (5) для нормированных $\varphi_n^{(2)}(x)$ и $\varphi_m^{(1)}(x)$

$$a_n^{(2)} = \int \varphi(x)\varphi_n^{(2)}(x)dx, \qquad a_m^{(1)} = \int \varphi(x)\varphi_m^{(1)}(x)dx$$

находятся из условия непрерывности $\varphi(x, y)$ при $y = b$. Далее, исходя из функционала

$$\lambda = \iint \left[\mu\varepsilon\varphi^2 - (\nabla\varphi)^2\right] dx\, dy \Big/ \iint \varphi^2 dx\, dy, \tag{7}$$

стационарного на решениях уравнения (1), можно показать, что выражениями (4), (5) равенство (7) удовлетворяется тождественно при условии

$$\int \varphi(x)\left[\nabla_y\varphi(x,\, b-0) - \nabla_y\varphi(x,\, b+0)\right]dx = F(\lambda) = 0. \tag{8}$$

Это — характеристическое уравнение для нахождения собственных значений λ. Таким образом, в рассматриваемой задаче в рамках вариационного принципа можно пользоваться пробной функцией одной координаты, имеющей смысл волновой функции на границе раздела $y = b$. Если эта функция зависит от некоторого числа l параметров γ_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$, то из требования стационарности функционала (7)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_i} = 0 \tag{9}$$

получаются уравнения

$$\int \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\gamma_i}\left[\nabla_y\varphi(x,\, b-0) - \nabla_y\varphi(x,\, b+0)\right]dx, \tag{10}$$

которое совместно с (8) определяют параметры λ и γ_i. Численное решение уравнений (8), (10) не вызывает принципиальных затруднений, и задача заключается в выборе $\varphi(x,b)$. Будем исходить из строгого разложения функции $\varphi(x,b)$ по некоторому полному ортонормированному базису $\varphi_k(x)$

$$\varphi(x,b) = \sum_k a_k \varphi_k(x).$$

Тогда вблизи границы $y = b$

$$\varphi(x,y) = \sum_k \varphi_k(x)\psi_k(y),$$

где

$$\psi_k(y) = \int \varphi(x,y)\varphi_k(x)dx.$$

Развивая эту простую идею, вместо уравнений (8), (10) придем к однородной алгебраической системе бесконечного числа линейных уравнений относительно коэффициентов a_k. Равенство нулю детерминанта системы дает условие для нахождения параметра λ. При конкретных расчетах заданная точность вычисления λ определяет необходимое число уравнений из системы, причем это число зависит от выбора базисных функций $\varphi_k(x)$. Понятно, что с целью упрощения расчета число уравнений можно уменьшить без потери точности соответствующим выбором базиса $\varphi_k(x)$. Расчет предельно упрощается, если в разложении $\varphi(x,b)$ можно ограничиться одним слагаемым. Именно этот случай является предметом дальнейшего анализа. Положим

$$\varphi(x,b) = A\varphi(x). \tag{11}$$

Здесь A — постоянная величина, а функция $\varphi(x)$ нормирована на единицу. В соответствии с вышеизложенным для $\varphi(x,y)$ при $y \approx b$ имеем приближенное равенство

$$\varphi(x,y) = A\varphi(x)\psi(y), \tag{12}$$

где

$$A\psi(y) = \int \varphi(x,y)\varphi(x)dx, \qquad \psi(b) = 1. \tag{13}$$

Теперь задача заключается в нехождении функций $\varphi(x)$, обеспечивающих наибольшую точность принятого приближения.

Уравнение относительно волновой функции на границе частичных областей

Математическая формулировка задачи об отыскании оптимальных функций $\varphi(x)$ может быть получена на основе вариационного принципа. Исходя из соображений простоты дальнейшего изложения, построим функционал

$$S = \iint \varphi(x,y)\left[\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \mu\varepsilon(x,y) - \lambda\right]\varphi(x,y)dx\,dy, \tag{14}$$

стационарный на решениях задачи (1) при условии, что вариация $\delta\lambda = 0$. Отметим, что уравнения (8), (10) могут быть получены из (14) так же, как из (7). Подынтегральная функция в (14) обращается в нуль во всех точках плоскости (x, y), за исключением границ раздела $y = \pm b$, поскольку выражения (4), (5) удовлетворяют (1) в частичных областях. Выделим вблизи границы $y = b$ (см. рисунок,*б*) узкую (бесконечно узкую при $\Delta \to 0$) полоску. В пределах этой полоски функция $\varphi(x, y)$ определяется приближенным равенством (12), причем, как следует из (13), $\varphi(y)$ и ее первая производная непрерывны при $y = b$, поскольку таким же свойством обладает точное решение $\varphi(x, y)$. Теперь вместо (14) для рассматриваемой полоски можно записать

$$\frac{S}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\int dx \int\limits_{b-\Delta}^{b+\alpha\Delta} dy\varphi(x)\psi(y)\Big[\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \mu\varepsilon(x, y) - \lambda\Big]\varphi(x)\psi(y). \qquad (15)$$

Прежде чем перейти к отысканию условий, обеспечивающих экстремум функционала (15), отметим, что на границах полоски $y = b-\Delta$ и $y = b+\alpha\Delta$ $(\alpha \geqslant 0)$ функция $\varphi(x, y)$ определяется выражениями (4), (5), удовлетворяющими уравнению (1). Это условие соответствует вариационной задаче с закрепленными концами. Поэтому для нахождения уравнений относительно искомых функций $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ будем считать, что при $y = b-\Delta$, $y = b + \alpha\Delta$ вариации $\delta\psi(y)$ и $\delta\nabla_y\psi(y)$ обращаются в нуль. Учитывая это обстоятельство и независимость вариаций $\delta\varphi(x)$ и $\delta\psi(y)$, из (15) при $\Delta \to 0$ получим

$$\left[\nabla_x^2 + \mu\frac{\varepsilon_2(x) + \alpha\varepsilon_1(x)}{1+\alpha} + \frac{\nabla_y^2\psi(b-0) + \alpha\nabla_y^2\psi(b+0)}{\psi(b)(1+\alpha)}\right]\varphi(x) = 0, \qquad (16)$$

$$\left[\nabla_y^2 + \mu\int\varepsilon(x, y)\varphi^2(x)dx + \int\varphi(x)\nabla_x^2\varphi(x)dx - \lambda\right]\varphi(y) = 0. \qquad (17)$$

В выражениях (16), (17) учтено, что

$$\int\varphi^2(x)dx = \Big(\varphi(x),\, \varphi(x)\Big) = 1.$$

Аналогичный результат получается, если рассмотреть границу $y = -b$, что является следствием симметрии $\varepsilon(x, y) = \varepsilon(x, -y)$. Используя (17), уравнению (16) можно придать самосогласованный вид

$$\left\{\nabla_x^2 + \mu\frac{\varepsilon_2(x) + \alpha\varepsilon_1(x)}{1+\alpha} - \right.$$

$$\left. - \left[\big(\varphi(x), \nabla_x^2\varphi(x)\big) + \mu\frac{\big(\varepsilon_2(x) + \alpha\varepsilon_1(x), \varphi^2(x)\big)}{1+\alpha}\right]\right\}\varphi(x) = 0. \qquad (18)$$

Здесь член, стоящий в квадратных скобках, представляет собой выражение собственного значения задачи (18) через решение $\varphi(x)$. Поэтому (18) можно переписать иначе

$$\left\{\nabla_x^2 + \mu\left[\varepsilon_1(x) + \gamma\Big(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)\Big)\right] - u\right\}\varphi(x) = 0, \tag{19}$$

где $\gamma = (1+\alpha)^{-1}$, $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$.

Следовательно, функция $\varphi(x)$, обеспечивающая наилучшую точность принятого приближения, является собственной функцией самосопряженной задачи (19), которая индуцирует полный ортогональный набор базисных функций, обсуждавшийся выше.

Таким образом, рассматриваемая задача (1) сводится к нахождению решений уравнения (19), зависящих от параметра γ, и двух характеристических уравнений (8), (10) относительно λ и γ. Объем вычислений при решении трансцендентных уравнений типа (8), (10) существенно зависит от выбора нулевого приближения. В рамках изложенной выше методики существует возможность сформулировать характеристические уравнения в нулевом приближении, значительно более простые, чем (8), (10).

Характеристические уравнения в нулевом приближении

Учитывая определение $\varepsilon(x,y)$ запишем уравнение (17) в компактной форме

$$\Big[\nabla_y^2 + \sigma\theta(1 - y/b) - \rho\Big]\psi(y) = 0. \tag{20}$$

Здесь введены обозначения $\sigma = \mu(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x), \varphi^2(x))$, $\rho = \lambda - (\varphi(x), \nabla_x^2\varphi(x)) - \mu(\varepsilon_1(x), \varphi^2(x))$, $\theta(1 - y/b) = 1$ при $y \leqslant b$, $\theta(1 - y/b) = 0$ при $y > b$. Теперь используем функционал (15), принимая во внимание, что на решениях уравнений (16), (17) или (19), (20) он обращается в нуль. Это позволяет из (15) с учетом (19), (20) получить явный вид собственного значения задачи (1)

$$\lambda = u + \rho - \sigma\gamma. \tag{21}$$

Возьмем выражение (21) в качестве исходного и зададимся целью отыскать четыре независимых уравнения относительно четырех параметров, стоящих в правой части (21). Решение уравнения (19) определяет зависимость

$$u = u(\gamma). \tag{22}$$

Для нахождения второго уравнения продифференцируем (19) по параметру γ, умножим на $\varphi(x)$ и проинтегрируем по всей области изменения x. В результате получим

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} = \mu\Big(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x), \varphi^2(x)\Big) = \sigma. \tag{23}$$

Теперь используем условие экстремума (9), при котором ищутся решения системы (8), (10). Дифференцируя (21) и учитывая (23), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{\partial \rho}{\partial \gamma} - \sigma - \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma} = \sigma + \frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \gamma} - \sigma - \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma}.$$

Отсюда при $\partial\rho/\partial\gamma \neq 0$ следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial \sigma} = \gamma. \tag{24}$$

Четвертое уравнение можно получить, решая (20) и учитывая, что $\psi(y)$ определяется выражением (13). Как видно из (4), при $|y| < b$ существуют независимые четные и нечетные по y решения. Поэтому в соответствии с (13) решения уравнения (20) обладают свойством $\psi(-y) = \pm\psi(y)$. Кроме того, в соответствии с (13) $\psi(b) = 1$. Этим требованиям удовлетворяют два независимых решения уравнения (20)

$$\psi_l(y) = \frac{\cos\sqrt{\sigma-\rho}\,y}{\cos\sqrt{\sigma-\rho}\,b}, \qquad \psi_0 = \frac{\sin\sqrt{\sigma-\rho}\,y}{\sin\sqrt{\sigma-\rho}\,b}.$$

Для области $y > b$ функция $\psi(y)$ задается выражениями (5) и (13), из которых видно, что при экстраполяции $\psi(y)$ в область больших значений y величина $\psi(y) \to 0$. Этому условию при $\psi(b) = 1$ удовлетворяет единственное решение уравнения (20)

$$\psi(y) = \exp\left[-\sqrt{\rho}\,(y-b)\right].$$

Требование непрерывности функции $\nabla_y\psi(y)$ на границе $y = b$ приводит к уравнениям

$$\operatorname{tg}\sqrt{\sigma-\rho}\,b = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\sigma-\rho}}, \qquad \operatorname{ctg}\sqrt{\sigma-\rho}\,b = -\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\sigma-\rho}} \tag{25}$$

соответственно для четных и нечетных по y решений.

По сравнению с системой (8), (10) уравнения (22)–(25) значительно проще и их решения, например, для кусочно-постоянных $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$, могут быть получены на микрокалькуляторе. Приемлемость описанного нулевого приближения для вычисления собственного значения λ подтверждается его тождественностью с вычислением λ методом самосогласованного поля, что устанавливается ниже.

Связь нулевого приближения с результатом метода самосогласованного поля

Метод самосогласованного поля [6,8] принято использовать для расчета многочастичных систем. Формально уравнение (1) можно рассматривать как двухчастичное, описывающее одномерное движение двух частиц: одной — вдоль оси $0x$, а другой — вдоль $0y$ с потенциалом взаимодействия $\varepsilon(x,y)$. В соответствии с методом самосогласованного поля волновая функция двух частиц $\varphi(x,y)$ представляется в виде произведения волновых функций отдельных частиц

$$\varphi(x,y) = X(x)Y(y). \tag{26}$$

Здесь, как в предыдущих разделах, функция $\varphi(x,y)$ без нарушения общности предполагается действительной. Подставляя выражение (26) в функционал (14) или (7), из условия стационарности $\delta S = \delta\lambda = 0$ получается система интегродифференциальных уравнений

$$\left\{\nabla_x^2 + \mu\left[\varepsilon_1(x) + \gamma\Big(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)\Big)\right] - \bar{u}\right\} X(x) = 0,$$

$$\Big[\nabla_y^2 + \bar{\sigma}\theta(1 - y/b)\theta(1 + y/b) - \bar{\rho}\Big] Y(y) = 0, \tag{27}$$

где

$$\bar{\gamma} = \int\limits_{-b}^{b} Y^2 dy, \qquad \bar{u} = \lambda - \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y\nabla_y^2 Y\, dy,$$

$$\bar{\sigma} = \mu\int X^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)dx, \qquad \bar{\rho} = \lambda - \int X\nabla_x^2 X\, dx - \mu\int X^2\varepsilon_1 dx, \tag{28}$$

$\theta(z)$ — функция Хевисайда, $X(x)$ и $Y(y)$ нормированы на единицу.

Представление решения в виде (26) соответствует процедуре приближенного разделения переменных в уравнении (1), а использование вариационного принципа, приводящего (1) к системе (27), (28), обеспечивает оптимизацию этой процедуры. Поэтому описанный подход к решению уравнения (1) можно назвать методом оптимального разделения переменных [9]. Он применим и в случае трехмерного уравнения Шредингера с неразделяющимися переменными. Система интегродифференциальных уравнений (27), (28) может быть решена методом итераций [8,10]. Однако в данном случае приемлем более простой путь решений. При условиях (27) функционал (14) равен нулю. Учитывая это и определение параметров (28), получаем выражение для собственного значения задачи (1) $\lambda = \bar{u} + \bar{\rho} - \bar{\gamma}\bar{\sigma}$, которое при заменах $\bar{u}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\sigma} \to u$, ρ, γ, σ совпадает с формулой (21). Функционал (7) дает тот же результат. Покажем теперь, что при указанных заменах параметры $\bar{u}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\sigma}$ удовлетворяют уравнениям (22)-(25).

Как видно, уравнение (19) с точностью до обозначений совпадает с первым уравнением из (27), поэтому характеристическое уравнение, устанавливающее связь параметров $\bar{u}$ и $\bar{\gamma}$, совпадает с (22). Далее, дифференцируя обе части первого равенства из (27) по $\bar{\gamma}$, умножая на $X(x)$ затем интегрируя по всей области переменной x и учитывая определение $\bar{\sigma}$, получим формулу (23). Аналогичная процедура со вторым уравнением из (27) приводит к выражению (24). Аналитические решения этого уравнения хорошо известны и параметры $\bar{\rho}$, $\bar{\sigma}$ для четных и нечетных по y решений связаны соотношениями (25). Следовательно, в рассматриваемом случае собственные значения задачи (1), вычисленные методом самосогласованного поля и в нулевом приближении, описанном в предыдущем разделе, совпадают.

Заключение

Изложенная методика сводит задачу (1) с потенциалом специального вида к одномерной задаче (19) и двум уравнениям (8), (10) относительно параметров λ и γ. Функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая (19), при вычислениях λ и γ однозначно определяет коэффициенты разложения волновой функции (4), (5) в частичных областях. В упрощенном варианте, названном нулевым приближением, собственные значения λ находятся по формуле (21), где параметры u, ρ, γ, σ удовлетворяют системе уравнений (22)-(25). Вычисленные таким образом значения λ для различных состояний совпадают с соответствующими значениями, найденными методом самосогласованного поля.

В работах [3-5] для прямоугольной потенциальной ямы ($\varepsilon_1(x) \equiv 0$; $\varepsilon_2(x) = \text{const}$ при $|x| \leqslant a$, $\varepsilon_2(x) = 0$ при $|x| > a$) с отношением боковых сторон $b/a = 2$ представлены функциональные зависимости $\lambda/\mu = f(a\sqrt{\mu})$ для низших состояний, полученные численными методами. Расчет системы (22)-(25) на микрокалькуляторе показывает практически полное совпадение указанных зависимостей с результатами наиболее точного из известных метода [5].

Список литературы

[1] *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 436 с.
[2] *Goell J.P.* // Bell Syst. Techn. J. 1969. Vol. 48. N 9. P. 2133–2166.
[3] *Matsuhara M.* // JOSA. 1973. Vol. 63. N 12. P. 1514–1517.
[4] *Гоэлл Дж.* // Введение в интегральную оптику. М.: Мир, 1977. С. 60.
[5] *Eyges L., Giamino P., Winterstener P.* // J. Opt. Soc. Amer. 1979. Vol. 69. N 9. P. 1226–1235.
[6] *Фок В.А.* Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976. 376 с.
[7] *Гончаренко А.М., Карпенко В.А., Могилевич В.Н.* // ТМФ. 1991. Т. 88. № 1. С. 59–65.
[8] *Слэтэр Дж.* Методы самосогласованного поля для молекул и твердых тел. М.: Мир, 1978. 665 с.
[9] *Гончаренко А.М., Карпенко В.А., Могилевич В.Н., Сотский А.Б.* // ДАН БССР. 1985. Т. 29. № 2. С. 127.
[10] *Давыдов А.С.* Квантовая механика. М.: Наука, 1963. 748 с.