

01;03

## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА И ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

© В.М.Коровин

Институт механики Московского государственного университета  
им.М.В.Ломоносова,  
119899 Москва, Россия  
(Поступило в Редакцию 13 июля 1995 г.)

В рамках уравнений магнитной гидродинамики и магнитостатики получено дисперсионное соотношение и изучены особенности распространения длинных и коротких волн на свободной поверхности слоя вязкой жидкости при наличии вертикальной силы Лоренца, возникающей за счет взаимодействия проходящего сквозь жидкость продольного электрического тока с внешним горизонтальным магнитным полем.

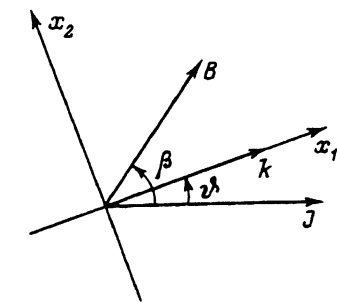
### Введение

В большинстве работ, посвященных исследованию магнитогидродинамических поверхностных волн (фигурирующих, например, в списке литературы [1]), изучалось влияние на волновые движения эффекта взаимодействия приложенного магнитного поля с электрическим током, индуцируемым в проводящей жидкости при ее движении поперек магнитных силовых линий. В связи же с прикладными задачами об устойчивости плоских слоев несмешивающихся жидкостей с сильно различающейся проводимостью, находящихся одновременно в магнитном и электрическом полях, значительный интерес представляет анализ влияния на волны силы Лоренца, возникающей при взаимодействии проходящего сквозь жидкость электрического тока, подведенного от внешнего источника, с магнитными полями — как приложенным, так и индуцируемым самим током. Краткая библиография по этому вопросу имеется в работах [2,3].

В устойчиво стратифицированной (в отсутствие электрического тока) находящейся в однородном горизонтальном магнитном поле  $\mathbf{B}$  системе из двух расположенных один поверх другого слоев несмешивающихся жидкостей, нижняя из которых обладает большей проводимостью, при включении горизонтального тока  $\mathbf{J}$ , порождающего напря-

влевающую вверх силу Лоренца достаточной высокой плотности (превышающей стабилизирующий эффект силы тяжести), возникает магнитогидродинамическая неустойчивость Рэлея–Тейлора [4]. Из теоретического анализа, подтвержденного экспериментом [4] в длинной прямоугольной кювете, вдоль которой пропускался электрический ток, известно, что процессу деформирования поверхности раздела жидкостей присуща анизотропия: при  $\mathbf{J} \perp \mathbf{B}$  первоначально плоская горизонтальная поверхность раздела превращается под действием силы Лоренца в гофрированную, причем центральный гребень и боковые впадины образующейся волнообразной (в поперечном сечении) складки располагаются параллельно  $\mathbf{J}$  (и перпендикулярно  $\mathbf{B}$ ). Полученные в теоретических работах [2,5] результаты показывают, что анизотропия магнитогидродинамической неустойчивости Рэлея–Тейлора проявляется и в том случае, когда наряду с горизонтальной имеется и вертикальная составляющая плотности приложенного тока.

При надлежащих условиях подобного рода неустойчивость наблюдается, естественно, и в горизонтальном слое проводящей жидкости, снизу ограниченной твердой стенкой, а сверху граничащей с непроводящим газом [6]. В тех случаях, когда сила Лоренца направлена вверх, но не превышает силы тяжести, или же направлена вниз, плоский слой устойчив, а волны на его свободной поверхности анизотропны. Основополагающей работой, посвященной исследованию эффекта анизотропии магнитогидродинамических по-



верхностных волн, является [7]. В этой работе без учета возмущения плотности электрического тока, вызываемого волнами, в предположении о малом отличии рассматриваемого вихревого пространственного движения жидкости от некоторого потенциального плоскопараллельного движения (которое фактически и исследовано) получено дисперсионное соотношение и в предельных случаях мелкой и глубокой жидкости изучено влияние направления распространения волн на фазовую и групповую скорости. Предложенный в [7] подход позволяет вычислить коэффициенты затухания коротких и длинных волн лишь в частном случае, когда  $\mathbf{J} \perp \mathbf{B}$ , а гребни волн параллельны  $\mathbf{J}$ .

В отличие от имеющихся работ в данной работе получено дисперсионное соотношение для пространственного вихревого волнового движения проводящей жидкости. С целью учета влияния на волны возмущения плотности электрического тока на базе линеаризованного уравнения индукции и уравнений магнитостатики решена задача о расчете возмущения магнитного поля. Найлены коэффициенты затухания коротких и длинных волн при любом направлении их распространения. Вычислен также параметр дисперсии длинных волн.

## 1. Постановка задачи

Пусть имеется плоский слой покоящейся однородной жидкости, сквозь которую проходит подведенный от внешнего источника горизонтальный ток постоянной плотности  $\mathbf{J}$ . Введем декартову систему координат  $x_1, x_2, x_3$ , ось  $x_1$  которой образует угол  $\vartheta$  с вектором

$\mathbf{J} = (J_1, J_2, 0)$  (см. рисунок), а ось  $x_3$  направлена вертикально вверх. Начало координат выбирается таким образом, чтобы при гидростатическом равновесии жидкости плоскость  $x_3 = 0$  совпадала со свободной поверхностью. Снизу жидкость ограничена непроводящей немагнитной стенкой, причем толщина слоя  $h$  много меньше его горизонтальных размеров. Предполагается, что создаваемое внешними источниками однородное горизонтальное магнитное поле  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, 0)$ , образующее угол  $\beta$  с направлением  $\mathbf{J}$ ,

$$B_1 = B \cos(\beta - \vartheta), \quad B_2 = B \sin(\beta - \vartheta), \quad J_1 = J \cos \vartheta, \quad J_2 = -J \sin \vartheta \quad (1)$$

много больше магнитного поля  $\mathbf{B}_s = (B_{s1}, B_{s2}, 0)$ , индуцируемого электрическим током  $\mathbf{J}$ . Внутри слоя собственное поле проходящего сквозь жидкость тока имеет линейный профиль

$$\begin{aligned} \text{при } -h \leq x_3 \leq 0 \quad B_{s1} &= -B_0 \sin \vartheta \left(1 + \frac{2x_3}{h}\right), \\ B_{s2} &= -B_0 \cos \vartheta \left(1 + \frac{2x_3}{h}\right), \quad B_0 = \frac{2\pi h}{c} J, \end{aligned} \quad (2)$$

тогда как вне жидкости  $B_{s1} = \mp B_0 \sin \vartheta$ ,  $B_{s2} = \mp B_0 \cos \vartheta$ , где верхний знак относится к области  $x_3 \geq 0$ , а нижний — к области  $x_3 \leq -h$ .

Отметим, что при выбранном направлении отсчета углов  $\beta$  и  $\vartheta$  (от  $\mathbf{J}$  к  $\mathbf{B}$  против хода часовой стрелки) в случае  $B_0 \ll B$  сила Лоренца в приближении магнитной гидродинамики  $c^{-1}JB \sin \beta$  (где  $c$  — скорость света) направлена вверх, если  $0 < \beta < \pi$ , и вниз, если  $\pi < \vartheta < 2\pi$ .

Далее рассматриваются поверхностные магнитогидродинамические волны малой амплитуды. Поле скоростей  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  удовлетворяет, естественно, уравнению неразрывности. Пусть  $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$  — возмущение плотности электрического тока, вызываемое волнами, а  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  — возмущение магнитного поля, индуцируемое  $\mathbf{j}$ . Обозначим через  $\rho$ ,  $p$  плотность и давление жидкости,  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести. В линеаризованном уравнении движения

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{c}(\mathbf{J} + \mathbf{j})\mathbf{B} + \rho \mathbf{g} \quad (3)$$

при записи силы Лоренца  $c^{-1}(\mathbf{J} + \mathbf{j})(\mathbf{B} + \mathbf{B}_s + \mathbf{b})$  взаимодействием возмущенной плотности тока  $\mathbf{J} + \mathbf{j}$  с невозмущенным собственным магнитным полем  $\mathbf{B}_s$  пренебрегается и, кроме того, используется основное положение безындукционного приближения<sup>[8,9]</sup>: возмущение тока  $\mathbf{j}$  учитывается, а создаваемым им полем  $\mathbf{b}$  пренебрегается.

Возмущение магнитного поля описывается линеаризованным уравнением индукции (без учета вклада  $\mathbf{B}_s$ ) и условием соленоидальности, а возмущение плотности электрического тока вычисляется из уравнения Максвелла в пренебрежении током смещения

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \nu_m \Delta \mathbf{b} = B_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2}, \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{b}, \quad \Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3^2}. \quad (5)$$

Здесь  $\nu_m = c^2/(4\pi\sigma)$  — магнитная вязкость,  $\sigma$  — проводимость жидкости. Пусть  $l_*$  — характерная длина, на которой происходит существенное изменение вихревой составляющей возмущения магнитного поля  $\mathbf{b}$ . Простые оценки с использованием (5) показывают, что пренебрежение в уравнении движения (3) слагаемым  $c^{-1}\mathbf{J} \times \mathbf{b}$  по сравнению с  $c^{-1}\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  допустимо в случае  $B_0/B \ll h/l_*$ . Далее это условие считается выполненным. Вопрос о порядке величины  $l_*$  обсуждается в следующем разделе.

Пусть  $x_3 = \eta(x_1, x_2, t)$  — уравнение поверхности жидкости при наличии волн. Вне жидкости поле потенциально. Полагая  $\mathbf{b} = \nabla\varphi_1$  при  $x_3 \geq \eta$  и  $\mathbf{b} = \nabla\varphi_2$  при  $x_3 \leq -h$ , из уравнений магнитостатики имеем

$$\Delta\varphi_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

На свободной поверхности жидкости линеаризованные кинематическое и динамическое условия, а также условие непрерывности магнитного поля записываются следующим образом:  
при

$$x_3 = 0 \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} = v_3, \quad p + \alpha \left( \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2} \right) = p_a, \quad (7)$$

при

$$x_3 = 0 \quad b_1 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = -\frac{4\pi}{c}J_2\eta, \quad b_2 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} = \frac{4\pi}{c}J_1\eta, \quad b_3 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} = 0, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $p_a$  — давление покоящегося газа над поверхностью жидкости.

На нижней границе слоя ставятся условие непротекания для жидкости и условие непрерывности для магнитного поля

$$\text{при } x_3 = -h \quad v_3 = 0, \quad \mathbf{b} = \nabla\varphi_2, \quad (9)$$

Физический смысл имеют, естественно, лишь те решения  $\varphi_1, \varphi_2$ , градиенты которых обращаются в нуль при  $x_3 \rightarrow \pm\infty$ . Нетрудно показать, что в рамках сопряженной задачи о расчете магнитных полей (4), (6), (8), (9) нормальная составляющая плотности возмущенного тока  $\mathbf{J} + \mathbf{j}$  автоматически обращается в нуль на свободной поверхности и на нижней границе слоя жидкости. При рассмотрении неустановившихся движений требуется также задать в начальный момент времени форму свободной поверхности и распределения соленоидальных полей  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{b}$  в слое жидкости.

Следует отметить, что источниками, порождающими возмущения магнитных полей, являются как движение проводящей жидкости в приложенном магнитном поле (правая часть линеаризованного уравнения индукции (4)), так и учитываемое в предложенной постановке возмущение проходящего сквозь жидкость электрического тока, вызываемое создаваемой волнами деформацией свободной поверхности — правые части условий сопряжения магнитных полей (8). Проведенный в разделе 3 анализ показывает, что именно за счет фигурирующей в (8) зависимости (при учете (1), (2)) возмущений магнитных полей от угла  $\varphi$  возникает анизотропия параметров волнового движения.

## 2. Частные решения

Преобразуем выписанные уравнения. Учитывая (5) и условия соленоидальности (3), (4) полей  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{b}$ , применим к уравнению движения (3) операцию  $\text{rot}$ . В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \text{rot } \mathbf{b}.$$

Далее, исключая  $\mathbf{b}$  из этого выражения и линейризованного уравнения индукции (4), получаем следующее уравнение для локальной завихренности жидкости:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nu_m \frac{\partial \Delta}{\partial t} - \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2B_1 B_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + B_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \right] \text{rot } \mathbf{v} = 0. \quad (10)$$

Поскольку в отсутствие волн состояние жидкости и электромагнитного поля однородно в плоскостях  $x_3 = \text{const}$ , а направление оси  $x_1$  выбрано произвольно, то, не ограничивая общности, решения выписанных уравнений можно искать в виде гармонических волн, распространяющихся вдоль оси  $x_1$ ,

$$[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{b}, \varphi_j] = \exp[i(kx_1 - \omega t)] [a, u(x_3), f(x_3), \Phi_j(x_3)],$$

$$p - p_a - x_3 \left( \rho g + \frac{1}{c} JB \sin \beta \right) = q(x_3) \exp[i(kx_1 - \omega t)],$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Далее считается, что волновой вектор  $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$  веществен, а частота в общем случае комплексна  $\omega(k) = \omega_r(k) + i\omega_i(k)$ . Ввиду линейности рассматриваемой задачи ее решение, удовлетворяющее некоторым начальным условиям, представляется в виде суперпозиции выражений вида (11).

Нетрудно показать, что для класса решений (11) сила Лоренца, фигурирующая в уравнении движения (3), при  $B_1 \neq 0$  имеет вихревой характер и лишь в частном случае  $B_1 = 0$  (т.е. при  $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$  эта сила потенциальна).

Подставляя (11) в уравнения (3)–(6), (10), имеем

$$iku_1 + \frac{du_3}{dx_3} = 0, \quad (12)$$

$$q = \frac{\rho\omega}{k} u_1 - \frac{1}{4\pi} B_2 f_2, \quad (13)$$

$$u_2 = -\frac{k}{4\pi\rho\omega} B_1 f_2, \quad (14)$$

$$\frac{dq}{dx_3} = i\rho\omega u_3 - \frac{1}{4\pi} \left[ B_1 \left( \frac{df_1}{dx_3} - ikf_3 \right) + B_2 \frac{df_2}{dx_3} \right], \quad (15)$$

$$ikf_1 + \frac{df_3}{dx_3} = 0, \quad (16)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_3^2} - l^2\right) f = -\frac{ik}{\nu_m} B_1 u, \quad l = k(1 - i\kappa)^{1/2}, \quad (17)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_3^2} - k^2\right) \Phi_j = 0,$$

так что,

$$\Phi_1 = E_1 \exp(-kx_3), \quad \Phi_2 = E_2 \exp(kx_3), \quad (18)$$

где  $E_1, E_2$  — произвольные константы,

$$\left[\frac{du_2}{dx_3} \mathbf{a}_1 + \left(iku_3 - \frac{du_1}{dx_3}\right) \mathbf{a}_2 - ik u_2 \mathbf{a}_3\right] = 0,$$

$$L = \frac{d^2}{dx_3^2} - m^2, \quad m = k \left[1 + i(S - \kappa)\right]^{1/2},$$

$$S = \frac{\sigma}{\rho c^2 \omega} B_1^2, \quad \kappa = \frac{\omega}{\nu_m k^2}. \quad (19)$$

Здесь  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  — базисные векторы. Знак корней, определяющих значения  $l, m$ , выбирается так, чтобы  $\text{Re } l > 0, \text{Re } m > 0$ . Отметим, что в случае, когда характерная длина, на которой происходит изменение  $\mathbf{b}$ , равна  $k^{-1}$ , параметр  $|S|$  представляет по порядку величины отношение вомущения силы Лоренца  $c^{-1} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , вызываемого волновым движением жидкости, к инерционному члену  $\rho d\mathbf{v}/dt$  в уравнении движения (3), а параметр  $|\kappa|$  — отношение локальной производной  $\partial \mathbf{b}/\partial t$  в уравнении индукции (4) к диссипативному члену  $\nu_m \Delta \mathbf{b}$ .

Принимая во внимание (11), преобразуем краевые условия (7)–(9) при

$$x_3 = 0 \quad \omega a = iu_3, \quad q = a \left(\frac{1}{c} JB \sin \beta + \rho g + \alpha k^3\right), \quad (20)$$

при

$$x_3 = 0 \quad f_1 - ik\Phi_1 = -\frac{4\pi a}{c} J_2, \quad f_2 = \frac{4\pi a}{c} J_1, \quad f_3 - \frac{d\Phi_1}{dx_3} = 0, \quad (21)$$

при

$$x_3 = -h \quad u_3 = 0, \quad f_1 = ik\Phi_2, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = \frac{d\Phi_2}{dx_3}. \quad (22)$$

Найдем решение системы уравнений (12)–(17), (19). Рассмотрим вначале случаи  $\vartheta \neq \beta + \pi/2, \vartheta \neq \beta + 3\pi/2$ ; при этом  $B_1 \neq 0$ . Исключая  $u_3$  из уравнения неразрывности (12) и проекции уравнения (19) на ось  $x_2$ , имеем

$$L \left(\frac{d^2}{dx_3^2} - k^2\right) u_1 = 0. \quad (23)$$

Отсюда в случае  $(\omega/k)^2 \neq B_1^2/(4\pi\rho)$  получаем

$$u_1 = A_1 \exp(kx_3) + A_2 \exp(-kx_3) + C_1 \exp(mx_3) + D_1 \exp(-mx_3). \quad (24)$$

Учитывая (24), из уравнения неразрывности (12) и проекций уравнения (19) на оси  $x_1, x_2$  находим

$$u_3 = -i \left\{ A_1 \exp(kx_3) - A_2 \exp(-kx_3) + \frac{k}{m} [C_1 \exp(mx_3) - D_1 \exp(-mx_3)] \right\},$$

$$u_2 = C_2 \exp(mx_3) + D_2 \exp(-mx_3). \quad (25)$$

Здесь  $A_j, C_j, D_j, j = 1, 2$  — произвольные константы.

Поле скоростей (24), (25) легко представить в виде суммы потенциальной и вихревой составляющих

$$\mathbf{u} = \nabla U + \mathbf{G}, \quad U = -\frac{i}{k} [A_1 \exp(kx_3) + A_2 \exp(-kx_3)],$$

$$\mathbf{G} = \exp(mx_3) \left[ C_1 \left( \mathbf{a}_1 - \frac{ik}{m} \mathbf{a}_3 \right) + C_2 \mathbf{a}_2 \right] +$$

$$+ \exp(-mx_3) \left[ D_1 \left( \mathbf{a}_1 + \frac{ik}{m} \mathbf{a}_3 \right) + D_2 \mathbf{a}_2 \right]. \quad (26)$$

С помощью (26) нетрудно найти частное решение уравнения индукции (17), удовлетворяющее условию соленоидальности (16) и проекции уравнения движения (14) на ось  $x_2$

$$\mathbf{f} = -\frac{k}{\omega} B_1 \nabla U - \frac{4\pi\rho\omega}{k} B_1^{-1} \mathbf{G}. \quad (27)$$

Принимая во внимание выражения (26), (27), из проекции уравнения движения (13) на ось  $x_1$  получаем

$$q = \frac{\rho\omega}{k} \left[ ikU + \exp(mx_3) (C_1 + C_2 B_1^{-1} B_2) + \exp(-mx_3) (D_1 + D_2 B_1^{-1} B_2) \right]. \quad (28)$$

Непосредственной подстановкой решений (28), (25), (27) в проекцию уравнения движения (15) на ось  $x_3$  легко убедиться, что уравнение (15) удовлетворяется. Таким образом, для рассматриваемой задачи с девятью краевыми условиями (20)–(22) найдено решение (18), (26)–(28), содержащее с учетом выражения (11) для свободной поверхности жидкости девять констант.

Вычисляя с помощью (26), (27) и (5) завихренность жидкости и возмущение плотности тока, имеем

$$\text{rot } \mathbf{v} = \exp[i(kx_1 - \omega t)] \left\{ \exp(mx_3) \left[ C_2(-m\mathbf{a}_1 + ik\mathbf{a}_3) + \frac{m^2 - k^2}{m} C_1 \mathbf{a}_1 \right] + \right.$$

$$\left. + \exp(-mx_3) \left[ D_2(m\mathbf{a}_1 + ik\mathbf{a}_3) + \frac{k^2 - m^2}{m} D_1 \mathbf{a}_2 \right] \right\}, \quad \mathbf{j} = -\frac{\rho c \omega}{k} B_1^{-1} \text{rot } \mathbf{v}. \quad (29)$$

Для глубокой ( $kh \gg 1$ ) жидкости нет необходимости в постановке краевых условий на нижней границе слоя (9). В этом случае ищется решение задачи, затухающее с изменением  $x_3$  по направлению в глубь жидкости, получающееся из (26)–(29) при  $A_2 = D_1 = D_2 = 0$ .

В случае  $B_1 = 0$  решения уравнений (12)–(17), (19) находятся аналогично и имеют следующий вид:

$$\mathbf{u} = \nabla U, \quad q = \frac{\rho\omega}{k} \left\{ ikU - \frac{1}{4\pi} B \left[ C_2 \exp(lx_3) + D_2 \exp(-lx_3) \right] \right\},$$

$$\mathbf{f} = \exp(lx_3) \left[ C_1 \left( \mathbf{a}_1 - \frac{ik}{l} \mathbf{a}_3 \right) + C_2 \mathbf{a}_2 \right] + \exp(-lx_3) \left[ D_1 \left( \mathbf{a}_1 + \frac{ik}{l} \mathbf{a}_3 \right) + D_2 \mathbf{a}_2 \right]. \quad (30)$$

Из этих выражений следует

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \exp[i(kx_1 - \omega t)] \left\{ \exp(lx_3) \left[ C_2(-l\mathbf{a}_1 + ik\mathbf{a}_3) - \frac{i\omega}{\nu_m l} C_1 \mathbf{a}_2 \right] + \right. \\ \left. + \exp(-lx_3) \left[ D_2(l\mathbf{a}_1 + ik\mathbf{a}_3) + \frac{i\omega}{\nu_m l} D_1 \mathbf{a}_2 \right] \right\}, \quad \frac{1}{c} \mathbf{j} \mathbf{B} = \nabla W,$$

$$W = -\frac{1}{4\pi} B \exp[i(kx_1 - \omega t)] \left[ C_2 \exp(lx_3) + D_2 \exp(-lx_3) \right]. \quad (31)$$

Таким образом, в волне, распространяющейся перпендикулярно приложенному магнитному полю (при  $\vartheta = \beta + \pi/2$  или  $\vartheta = \beta + 3\pi/2$ ), движение жидкости потенциально, поле скоростей является плоским, а возмущение плотности электрического тока пространственным.

Из выражений (29), (31) следует, что на глубокой жидкости возмущение плотности тока (а также завихренность в случае  $B_1 \neq 0$ ) локализуется вблизи свободной поверхности в слое толщины  $\tau = (\text{Re } m)^{-1}$  при  $B_1 \neq 0$  или  $\tau = (\text{Re } l)^{-1}$  при  $B_1 = 0$ , в то время как потенциальные составляющие скорости (и возмущения магнитного поля при  $B_1 \neq 0$ ) локализуются в слое толщины  $k^{-1}$ . Если же  $h \lesssim \tau$ , то движение всюду по толщине слоя жидкости является вихревым. Обращаясь к выражениям (17), (19), нетрудно получить

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{k} \left\{ d + \left[ d^2 + \omega_r^2 \left( \frac{\sigma}{\rho c^2 |\omega|^2} B_1^2 - \frac{1}{\nu_m k^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{-1/2}, \\ d = 1 + \omega_i \left( \frac{\sigma}{\rho c^2 |\omega|^2} + \frac{1}{\nu_m k^2} \right). \quad (32)$$

Таким образом, при оценке порядка величины  $\mathbf{j}$  из уравнения (5) в качестве характерной длины следует взять  $l_* = \min(h, \tau)$ .



Применительно к рассмотренному в [7] случаю  $\omega_i = 0$  для слоев ртути ( $\sigma = 9 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ ,  $\nu_m = 0.8 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \cdot \text{c}^{-1}$ ,  $\rho = 13.6 \text{ г} \cdot \text{cm}^{-3}$ ,  $\alpha = 465 \text{ дин} \cdot \text{cm}^{-1}$ ,  $J = 50 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$ ,  $B = 2000 \text{ Гс}$ ) при  $h = 5 \text{ см}$ ,  $k = 0.9 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\omega = 30 \text{ cm}^{-1}$  и при  $h = 0.5 \text{ см}$ ,  $k = 0.4 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\omega = 9 \text{ c}^{-1}$  имеем  $S = 0.1$ ,  $\varkappa = 5 \cdot 10^{-3}$  и соответственно  $S = 0.3$ ,  $\varkappa = 9 \cdot 10^{-3}$ , так что  $k\tau \sim 1$ . В достаточно сильном магнитном поле возможен, вообще говоря, случай  $k\tau \ll 1$ .

Для полноты исследования следует также рассмотреть случай  $(\omega/k)^2 = B_1^2/(4\pi\rho)$ , когда корни характеристического уравнения, записанного для дифференциального уравнения четвертого порядка (23), оказываются кратными. Нахождение частных решений уравнений (12)–(17), (19) и в этом случае не представляет принципиальной трудности. Решения не выписаны лишь потому, что, как показывает детальный анализ, этот случай физически невозможен. Краткое изложение обоснования такого заключения приведено в конце работы.

### 3. Дисперсионное соотношение

Найденные частные решения должны, естественно, удовлетворять сформулированным краевым условиям. Рассмотрим случай  $B_1 \neq 0$ ,  $(\omega/k)^2 \neq B_1^2/(4\pi\rho)$ . После подстановки выражений (18), (26)–(28) в равенства (20)–(22) получаем систему из девяти линейных однородных алгебраических уравнений относительно констант  $a$ ,  $A_j$ ,  $C_j$ ,  $D_j$ ,  $E_j$ ,  $j = 1, 2$

$$\omega a - A_1 + A_2 - \frac{k}{m}(C_1 - D_1) = 0,$$

$$\frac{k}{\rho\omega} \left( \frac{1}{c} J B \sin \beta + \rho g + \alpha k^2 \right) a - A_1 - A_2 - C_1 - B_2 B_1^{-1} C_2 - D_1 - B_2 B_1^{-1} D_2 = 0,$$

$$\frac{4\pi}{c} J_2 a - \frac{k}{\omega} B_1 (A_1 + A_2) - \frac{4\pi\omega}{k} \rho B_1^{-1} (C_1 + D_1) - ik E_1 = 0,$$

$$\frac{a}{c} J_1 + \frac{\omega}{k} \rho B_1^{-1} (C_2 + D_2) = 0,$$

$$\frac{k}{\omega} B_1 (A_1 - A_2) + \frac{4\pi\omega}{m} B_1^{-1} (C_1 - D_1) - ik E_1 = 0,$$

$$A_1 \exp(-kh) - A_2 \exp(kh) + \frac{k}{m} [\exp(-mh)C_1 - \exp(mh)D_1] = 0,$$

$$\frac{k}{\omega} B_1 [\exp(-kh)A_1 + \exp(kh)A_2] + \frac{4\pi\omega}{k} \rho B_1^{-1} [\exp(-mh)C_1 + \exp(mh)D_1] + ik \exp(-kh)E_2 = 0,$$

$$\exp(-mh)C_2 + \exp(mh)D_2 = 0,$$

$$\frac{k}{\omega} B_1 [\exp(-kh)A_1 - \exp(kh)A_2] + \frac{4\pi\omega}{m} \rho b_1^{-1} [\exp(-mh)C_1 - \exp(mh)D_1] + ik \exp(-kh)E_2 = 0. \quad (33)$$

Для существования нетривиального решения системы (33) требуется, чтобы ее определитель  $D(\omega, k)$  был равен нулю. Пользуясь при вычислении  $D(\omega, k)$  свойствами определителей, можно показать, что  $D(\omega, k) = 0$  при выполнении условия

$$\det(a_{ij}) = 0, \quad (34)$$

где  $(a_{ij})$  — квадратная матрица третьего порядка, элементы которой ( $i$  — номер строки,  $j$  — номер столбца) записываются следующим образом:

$$a_{11} = \frac{s^2}{\rho} \left( \frac{1}{4\pi} B_1^2 - \frac{1}{kc} J_2 B_1 \right) + \frac{1}{4\pi\rho} B_1^2 \left( \frac{\gamma}{k} + \frac{\alpha k}{\rho} \right), \quad a_{13} = \frac{1}{4\pi\rho} B_1^2 - s^2,$$

$$a_{21} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{kc} J_2 B_1 - \frac{1}{2\pi} B_1^2 \right), \quad a_{23} = 1 - \exp(-kh) \left( \operatorname{ch} mh + \frac{k}{m} \operatorname{sh} mh \right),$$

$$a_{22} = \frac{1}{4\pi\rho} B_1^2 - s^2 \exp(-kh) \left( \operatorname{ch} mh + \frac{k^2 + m^2}{2km} \operatorname{sh} mh \right), \quad a_{12} = 0,$$

$$a_{31} = s^2 - \operatorname{th} kh \left( \frac{\gamma}{k} + \frac{\alpha k}{\rho} \right), \quad a_{33} = \frac{k}{m} \operatorname{sech} kh \operatorname{sh} mh - \operatorname{th} kh,$$

$$a_{32} = \frac{s^2}{2} \left[ \operatorname{sech} kh \left( \operatorname{ch} mh + \frac{k}{m} \operatorname{sh} mh \right) - 1 - \operatorname{th} kh \right],$$

$$s = \frac{\omega}{k}, \quad \gamma = g + \frac{1}{\rho c} J_2 B_1.$$

Выражение (34), представляющее собой дисперсионное соотношение, существенно отличается от дисперсионного соотношения  $a_{31} = 0$ , полученного в работе [7] без расчета возмущения плотности тока с использованием упрощающего предположения о малом отличии исследуемого вихревого пространственного движения жидкости от потенциального плоскопараллельного движения с полем скоростей  $\mathbf{v}(x_1, x_3, t)(v_1, 0, v_3)$ , реализующемся, как показано в предыдущем разделе, лишь в частных случаях  $\vartheta = \beta + \pi/2$  и  $\vartheta = \beta + 3\pi/2$ .

В классических задачах о волнах на поверхности тяжелой идеальной жидкости имеется четыре характерных линейных масштаба: амплитуда  $a$  и длина волны  $2\pi/k$ , глубина слоя жидкости  $h$ , капиллярная постоянная  $\sqrt{2\alpha/(\rho g)}$ . В рассматриваемой задаче о магнитогидродинамических поверхностных волнах в невязкой жидкости с конечной проводимостью к их числу добавляется характерный масштаб  $\tau$ , определяемый выражением (32).

При записи уравнения движения (3) считалось, что параметр нелинейности  $ka$  (или же  $a/h$  в случае  $kh \ll 1$ ) пренебрежимо мал. В зависимости же от соотношений между  $k^{-1}$ ,  $h$  и  $\tau$  реализуются различные режимы волновых движений.

#### 4. Затухающие волны

Рассмотрим случай мелкой жидкости, когда толщина слоя много меньше длины волны, т.е.  $\varepsilon_1 = kh \ll 1$ . Пусть при этом  $|\varkappa| \sim \varepsilon_1^{1/2}$ ,  $|S| \ll 1$ , так что  $k\tau \sim 1$  и за счет действия возмущения силы Лоренца завихренность жидкости всюду отлична от нуля. Разлагая входящие в (34) гиперболические функции и экспоненту в степенные ряды и пренебрегая в этих разложениях членами порядков  $\varepsilon_1^3$  и выше по сравнению с единицей, имеем

$$s^2 - \gamma h + \frac{i\varepsilon_1}{8\pi\rho} \frac{s}{\nu_m k} B_0 B_1 \sin \vartheta + \varepsilon_1^2 \left( \frac{\gamma h}{3} - \frac{\alpha}{\rho h} + \frac{i}{8\pi\rho} \frac{s}{\nu_m k} B_1^2 \right) = 0. \quad (35)$$

Пусть невозмущенное магнитное поле  $B_0$ , индуцируемое проходящим сквозь жидкость электрическим током  $\mathbf{J}$ , столь малó, что  $B_0|B_1 \sin \vartheta| \ll \varepsilon_1 B_1^2$ . В этом случае, учитывая, что волны распространяются в положительном направлении оси  $x_1$ , из (35) находим

$$\begin{aligned} \omega &= s_0 k - \delta k^3 - i\mu k^2, \\ s_0 &= \sqrt{gh} \left[ 1 - \Gamma \sin \vartheta \cos(\beta - \vartheta) \right]^{1/2}, \quad \Gamma = \frac{1}{\rho g c} J B, \\ \delta &= \frac{h}{6} \left( s_0 h - \frac{3\alpha}{\rho s_0} \right), \quad \mu = \frac{h^2}{16\pi\rho\nu_m} B^2 \cos^2(\beta - \vartheta). \end{aligned} \quad (36)$$

Из первого выражения (36) следует, что для затухания волн с ростом времени необходимо, чтобы подкоренное выражение в формуле для предельной (при  $k \rightarrow 0$ ) фазовой скорости  $s_0$  было положительным. Нетрудно показать, что при заданных  $J$ ,  $B$ ,  $\beta$  и всех  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  это требование выполняется, если

$$\Gamma(1 + \sin \beta) < 2. \quad (37)$$

При выполнении этого условия первое выражение (36) представляет дисперсионное соотношение для волн в диспергирующей среде при наличии диссипации [10]. В рассматриваемом случае магнитогидродинамических поверхностных волн в невязкой жидкости диссипация связана с диффузией возмущений магнитного поля  $\mathbf{b}$  (и тока  $\mathbf{j}$ ), генерируемых как движением проводящей жидкости в магнитном поле  $\mathbf{B}$ , так и деформацией свободной поверхности. Этот процесс генерации и диффузии описывается уравнением индукции (4) совместно с краевыми условиями (8).

Таким образом, наряду с предельной фазовой скоростью  $s_0$  параметр дисперсии  $\delta$  и коэффициент затухания  $\mu k^2$  также зависят от угла  $\vartheta$  между проходящим сквозь жидкость невозмущенным электрическим током  $\mathbf{J}$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Причиной анизотропии является вызываемая деформацией свободной поверхности зависимость от  $\vartheta$  возмущения тока  $\mathbf{j}$  и связанной с ним вихревой составляющей силы Лоренца  $c^{-1} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , фигурирующей в уравнении движения (3).

Обращаясь к (36), легко показать, что при фиксированных  $J$ ,  $B$ ,  $\beta$  предельная фазовая скорость максимальная при  $\vartheta = \beta/2 + 3\pi/4$  и минимальна при  $\vartheta = \beta/2 + \pi/4$ . Наибольшее же затухание испытывают волны, распространяющиеся параллельно или антипараллельно  $B$ , причем коэффициент затухания уменьшается при  $\vartheta \rightarrow \beta - \pi/2$ ,  $\vartheta \rightarrow \beta - 3\pi/2$ . Из (36) видно, что на мелкой проводящей жидкости при наличии магнитного поля и тока (в отличие от волн на мелкой воде [10]) при изменении направления  $k$  параметр дисперсии  $\delta$  может изменять знак.

Следует отметить, что с точностью до обозначений найденное в [7] дисперсионное соотношение для длинных волн получается при пренебрежении в (35) членами порядка  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_1^2$ . В таком приближении затухание и дисперсия волнового пакета не учитываются.

Рассмотрим мелкую жидкость в случае когда  $\tau$  много меньше длины волны  $\varepsilon_2 = k\tau$ , а  $kh \sim \varepsilon_2^2$ . Пренебрегая в (34) членами порядков  $\varepsilon_2$  и выше, имеем

$$\left(s^2 - \gamma h\right) \left(1 - \frac{ih}{2\nu_m} s\right) = 0.$$

При выполнении условия устойчивости (37) действительный корень этого уравнения  $\omega = s_0 k$  описывает, как и в предыдущем случае, незатухающие (в рассматриваемом приближении) бегущие волны, в то время как мнимый корень  $\omega = -2i\nu_m k/h$  соответствует высокочастотным затухающим за счет магнитной вязкости колебаниям свободной поверхности жидкости, не связанным с распространением волн.

Рассмотрим случай глубокой жидкости, когда толщина слоя много больше длины волны, так что  $kh \gg 1$ . Полагая  $A_2 = D_1 = D_2 = E_2 = 0$  и подставляя выражения (26)–(28) и решение (18) для  $\Phi_1$  в краевые условия на свободной поверхности (20), (21), приходим к алгебраической системе линейных уравнений относительно  $a$ ,  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $E_1$ . Из условия существования нетривиального решения этой системы, имеющего вид равенства нулю определителя пятого порядка, находим дисперсионное соотношение для волн на глубокой жидкости

$$\begin{aligned} \omega^4 \left(1 + \frac{m}{k}\right) - k \left\{ \frac{m\omega^2}{2\pi\rho} B_1^2 + \left[ \omega^2 \left(1 + \frac{m}{k}\right) - \frac{k^2}{2\pi\rho} B_1^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \left( g + \frac{1}{\rho c} J_2 B_1 + \frac{\alpha}{\rho} k^2 \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

С учетом выполняющегося с большим запасом условия  $B_0|B_1 \sin \vartheta| \ll kh B_1^2$  фигурирующие в решениях константы следующим образом выражаются через амплитуду колебаний свободной поверхности:

$$\begin{aligned} A_1 = 2\pi\rho\omega^3(k+m)M_a^{-1}, \quad C_1 = -\omega m(kB_1)^2 M_a^{-1}, \\ C_2 = -\frac{k}{\rho c \omega} J_1 B_1 a, \quad M = 2\pi\rho\omega^2(k+m) - k^3 B_1^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Принимая во внимание (1), отсюда заключаем, что  $C_2 = 0$  при  $\vartheta = \pi/2$ ,  $\vartheta = 3\pi/2$ . С учетом этого равенства из формул (26), (28)

следует, что движение жидкости в волнах, распространяющихся перпендикулярно  $J$ , является плоскопараллельным, причем в этом случае, как видно из (29), вихревые линии и возмущение плотности тока  $\mathbf{j}$  горизонтальны и перпендикулярны  $\mathbf{J}$ .

Применительно к волнам, для которых  $\varepsilon_3 = |S - \kappa| \ll 1$  (в этом случае длина волны и толщина вихревого слоя по порядку величины одинаковы  $k\tau \sim 1$ ), пренебрегая в дисперсионном соотношении (38) малыми порядка  $\varepsilon_3^2$  и выше по сравнению с единицей, имеем

$$\omega^2 + 2i\zeta\omega - k \left( g + \frac{1}{\rho c} J_2 B_1 + \frac{\alpha}{\rho} k^2 \right) = 0, \quad \zeta = \frac{1}{16\pi\rho\nu_m} B_1^2.$$

Отсюда находим

$$\omega = -i\zeta + \left[ k \left( g + \frac{1}{\rho c} J_2 B_1 + \frac{\alpha}{\rho} k^2 \right) - \zeta^2 \right]^{1/2}. \quad (40)$$

В рассматриваемых условиях к такому же результату приводит, естественно, и предельный переход  $kh \rightarrow \infty$  в дисперсионном соотношении общего вида (34).

Таким образом, при выполнении условия (37) возбужденные в начальный момент волны с течением времени затухают. Для достаточно коротких волн подкоренное выражение в (40) положительно, так что коэффициент затухания в этом случае равен  $\zeta$ .

## 5. Незатухающие волны

Рассмотрим магнитогидродинамические поверхностные волны в глубокой жидкости ( $kh \gg 1$ ) в случае  $k/|m| \ll 1$ . Пренебрегая в дисперсионном соотношении (38) малыми порядка  $k/|m|$  по сравнению с единицей и учитывая неравенство  $B_0|B_1 \sin \vartheta| \ll khB_1^2$ , получаем

$$\omega^2 - k \left( g + \frac{k}{2\pi\rho} B_1^2 + \frac{\alpha}{\rho} k^2 \right) = 0. \quad (41)$$

Таким образом, в рассматриваемом режиме волнового движения, для реализации которого необходимо сильное магнитное поле  $|B_1| \gg \sqrt{\rho/2\pi} kc^2/\sigma$  (играющее доминирующую роль в (41)), амплитуда гармонических волн в процессе их распространения по свободной поверхности глубокой жидкости не изменяется. Сравнение выражений (36), (40), (41) показывает, что сделанный в работе [7] вывод о том, что в мелкой жидкости волны затухают слабее, чем в глубокой жидкости, справедлив лишь при  $k\tau \sim 1$ .

Рассмотрим далее волны, распространяющиеся перпендикулярно  $\mathbf{B}$ ; при этом, естественно,  $B_1 = 0$ . Обращаясь к уравнению индукции (4), нетрудно видеть, что в этом случае движение проводящей жидкости в приложенном магнитном поле  $\mathbf{B}$  не вызывает генерации  $\mathbf{b}$  непосредственно в объеме, занятом жидкостью. Причиной же возникновения  $\mathbf{b}$  является поверхностный эффект: вызываемая бегущими волнами периодическая по времени деформация верхней границы слоя

порождает на ней, согласно (8), возмущение поля  $\mathbf{b}$ . Возникающее в границе возмущение  $\mathbf{b}$  непрерывно диффундирует в глубь проводящей жидкости и, кроме того, в общем случае искажает вне слоя однородное приложенное поле.

Подставляя решения (18), (30) в краевые условия (20)–(22), в результате выкладок, аналогичным предыдущим, получаем классическое дисперсионное соотношение для волн на воде [11]

$$\omega^2 = \left( gk \operatorname{th} kh \right) \left( 1 + \frac{\alpha}{\rho g} k^2 \right). \quad (42)$$

Таким образом, при  $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$  электромагнитное поле не оказывает влияния на частоту магнитогидродинамических поверхностных волн, распространяющихся в этом случае без затухания подобно капиллярно-гравитационным волнам на свободной поверхности идеальной жидкости. При этом формула (32) для толщины поверхностного слоя в глубокой жидкости, в котором локализуется возмущение плотности электрического тока, упрощается, поскольку  $d = 1$ ,  $B_1 = 0$ .

Входящие в (18), (30) константы записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= aN \exp(kh), & A_2 &= aN \exp(-kh), \\ C_1 &= aPl(k+l) \exp(lh), & D_1 &= aPl(k-l) \exp(-lh), \\ C_2 &= aQ \exp(lh), & D_2 &= -aQ \exp(-lh), \\ E_1 &= 2iaP(l \operatorname{ch} lh + k \operatorname{sh} lh), & E_2 &= -2iaPl \exp(kh), \\ N &= \frac{\omega}{2} \operatorname{cosech} kh, & P &= -\frac{2\pi}{cr} J_2, \\ Q &= \frac{2\pi}{c} J_1 \operatorname{cosech} lh, & r &= (k^2 + l^2) \operatorname{sh} lh + 2kl \operatorname{ch} lh. \end{aligned}$$

Поскольку в рассматриваемом случае  $\vartheta = \beta + \pi/2$  или же  $\vartheta = \beta + 3\pi/2$ , то из этих выражений при  $\beta = \pi/2$ ,  $\beta = 3\pi/2$  следует  $P = 0$ . Обращаясь к решениям (18), (30), легко видеть, что при  $\mathbf{J} \perp \mathbf{B}$  поверхностные волны, распространяющиеся параллельно (или антипараллельно)  $\mathbf{J}$ , не искажают внешнее магнитное поле. При этом в самой жидкости  $b_1 = b_3 = 0$ ,  $b_2 \neq 0$ .

Обсудим кратко гипотетический случай  $(\omega/k)^2 = B_1^2/(4\pi\rho)$ . При выполнении этого равенства условие существования нетривиального решения системы алгебраических уравнений, получающейся при подстановке решений уравнений (12)–(19) в краевые условия (20)–(22), приводит к трансцендентному уравнению для  $k$ , имеющему лишь комплексные корни. При выборе же решений (11) исходных уравнений (3), (4), (6) предполагалось, что  $k$  — вещественный параметр. Полученное противоречие свидетельствует о том, что случай  $(\omega/k)^2 = B_1^2/(4\pi\rho)$  физически нереализуем.

Анализ магнитогидродинамических поверхностных волн на мелкой и на глубокой жидкостях, проведенный в рамках постановки задачи, отличной от ранее применявшихся, позволяет вычислить коэффициент затухания и показать, что он максимален у волн, распространяющихся параллельно или антипараллельно приложенному горизонтальному магнитному полю  $\mathbf{B}$ . Установлено, что на глубокой жидкости возмущение плотности тока  $\mathbf{j}$  локализовано вблизи свободной поверхности. На мелкой жидкости параметр дисперсии волнового пакета зависит как от угла между  $\mathbf{B}$  и направлением волновых векторов  $\mathbf{k}$ , так и от угла между  $\mathbf{k}$  и невозмущенной плотностью проходящего сквозь жидкость электрического тока  $\mathbf{J}$ . Показано, что за счет вихревой составляющей возмущения силы Лоренца, вызываемого волновым движением, в общем случае все три компоненты скорости и возмущения плотности тока отличны от нуля. Если же  $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ , то  $j_1 \neq 0$ ,  $j_2 \neq 0$ ,  $j_3 \neq 0$ , а движение жидкости в волне является потенциальным и плоскопараллельным. При этом электромагнитное поле не оказывает влияние на частоту магнитогидродинамических поверхностных волн, так что они распространяются без затухания подобно капиллярно-гравитационным волнам в идеальной жидкости. При  $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$  возможен случай, когда магнитное поле вне жидкости не возмущается волновым движением.

### Список литературы

- [1] Селезнев И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев: Наукова думка, 1991. 200 с.
- [2] Pigny S., Moreau R. // Eur. J. Mech. B. 1992. Vol. 11. N 1. P. 1-20.
- [3] Sneyd A.D. // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 236. P. 111-126.
- [4] Duc X.N. // C.R. Acad. Sc. Paris. 1968. T. 266. Sér. A. P. 738-740.
- [5] Moreau R.J., Ziegler D. // Light Metal. 1986. P. 359-364.
- [6] Baker R.C. // Nature. 1965. Vol. 207. N 4992. P. 65-66.
- [7] Shercliff J.A. // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 38. Pt 2. P. 353-364.
- [8] Брагинский С.И. // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. Вып. 5.(11). С. 1417-1430.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 663 с.
- [10] Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
- [11] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.