

01;04;10

## СИЛОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ С ПРОВОДЯЩИМ КОЖУХОМ

© А.П.Курьшев, В.Д.Андреев

Балтийский государственный технический университет,  
198005 Санкт-Петербург, Россия  
(Поступило в Редакцию 5 июня 1995 г.)

Исследуется силовое взаимодействие пучка релятивистских электронов с системой плазменный канал, окруженный высокопроводящим кожухом, обладающим цилиндрической геометрией. Рассмотрен установившийся режим  $\omega = kv$ . Использована модель холодной электронной плазмы со столкновениями. Получены формулы для поперечной составляющей силы, действующей на пучковые электроны при произвольном отклонении РЭП от оси канала, с учетом различных физических факторов: конечные  $\gamma$  и ультрарелятивистский предел  $\gamma \rightarrow \infty$ , бесстолкновительный и различные столкновительные режимы ( $\omega_p \lesssim \nu/2$ ), "кожух" — идеальный проводник и проводник с конечной проводимостью.

### Введение

В литературе [1–6] обсуждается проблема, связанная с транспортировкой релятивистских электронных пучков (РЭП) по плазменным каналам, окруженным средами с различной проводимостью — от вакуума до идеального проводника.

Как известно, силовое взаимодействие РЭП с системой плазменный канал–проводящий кожух связано с возбуждением в кожухе приповерхностных положительных зарядов и обратных токов, причем взаимодействие между зарядами и РЭП вызывает силу притяжения, а между токами и РЭП — взаимное их отталкивание. Поэтому ясно, что преимущественное действие одного или другого фактора приведет к эффекту суммарного притяжения или отталкивания. В вакуумном пределе превалирует зарядовое взаимодействие, что приводит к притяжению РЭП к проводнику. В случае наличия в канале транспортировки плазмы осуществляется частичное или полное экранирование заряда пучка. В результате токовое взаимодействие может привести к появлению силы, стабилизирующей отклонение РЭП от оси плазменного канала. Этот эффект может быть использован для поперечной

стабилизации траектории пучка при его транспортировке через плазму, в проблеме формирования кольцевого РЭП [5] и т.д. В [6] анализируется эффект притяжения РЭП к слабоионизированному каналу в модели, когда свойства плазмы могут быть описаны в терминах постоянной проводимости  $\sigma$ .

В настоящей работе исследуется силовое взаимодействие пучка релятивистских электронов с системой плазменный канал, окруженный высокопроводящим кожухом, обладающим цилиндрической геометрией. Для плазмы использована модель холодной электронной плазмы со столкновениями, для пучка — модель пучка конечной длительности, сохраняющего свои параметры неизменными. Для вычисления силы, действующей на РЭП, использован метод функции Грина. Рассмотрен установившийся режим.

Выражение для поперечной составляющей силы Лоренца, действующей на пучковые электроны, движущиеся вдоль оси  $z$  со скоростью  $u$  ( $z, r_\varphi$  — цилиндрические координаты), имеет вид

$$F = e(E_r - \beta B_\varphi), \quad \beta = \frac{u}{c}. \quad (1)$$

Поставленная задача сводится к решению уравнений Максвелла с заданными линейными свойствами среды. Линейной модели холодной электронной плазмы со столкновениями соответствует, как известно, тензор диэлектрической проницаемости вида

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij}\varepsilon(\omega) = \delta_{ij} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} \right), \quad (2)$$

где  $\omega_p$  — ленгмюровская частота плазменных электронов,  $\nu$  — частота столкновений плазменных электронов.

Получим уравнения, определяющие электромагнитное поле в случае отсутствия осевой симметрии задачи. Воспользуемся уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_b, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_b \end{aligned} \quad (3)$$

с материальным уравнением, не учитывающим пространственную дисперсию

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \varepsilon_{ij}(t - t', \mathbf{r}) E_j(t', \mathbf{r}). \quad (4)$$

Применим интегральное преобразование Фурье по продольной координате, преобразование Лапласа по времени и разложение в ряд Фурье по угловой координате

$$A(\omega, r, l, k) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dt \exp(i(\omega t - kz - l\varphi)) A(t, r, \varphi, z),$$

$$A(t, r, \varphi, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(il\varphi) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dk \int d\omega \exp(-i(\omega t - kz)) A(\omega, r, l, k). \quad (5)$$

Спроектируем уравнения (3) на оси цилиндрической системы координат, используя материальное уравнение (4). Для фурье-лаплас-образов компонент электромагнитного поля определяющих поперечную составляющую силы Лоренца, действующую на электроны пучка, получим

$$E_r = \kappa^{-2} \left( -ik \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega}{c} \frac{l}{r} B_z \right), \\ B_\varphi = -\kappa^{-2} \left( i \frac{\omega}{c} \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} - k \frac{l}{r} B_z \right), \quad \kappa^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega). \quad (6)$$

Рассмотрим случай установившегося режима. Для этого положим в (6)  $\omega = ku$ . В результате искомая комбинация компонент электромагнитного поля будет определяться  $E_z$ -компонентой напряженности электрического поля и для силы получим

$$F = -e \frac{i}{k} \frac{\partial E_z}{\partial r}. \quad (7)$$

### Идеально проводящий кожух

Проанализируем сначала ультрарелятивистский предел  $\gamma \rightarrow \infty$ . Из уравнений Максвелла нетрудно получить уравнение для  $E_z$ -компоненты

$$\mathcal{L} E_z = \frac{4\pi i \kappa^2}{kc\varepsilon(kc)} j_b(k), \quad (8)$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \kappa^2,$$

$$j_b(k) = j_b(r, \varphi) \tilde{j}_z(k), \quad \tilde{j}_z(k) \div \eta(\hat{z} + c\tau) - \eta(\hat{z}), \quad (9)$$

$\eta$  — ступенчатая функция Хевисайда,  $\tau$  — длительность пучка,  $\hat{z}$  — расстояние от переднего фронта пучка,  $j_b$  — распределение плотности тока пучка.

В случае плазменного канала, окруженного идеальным проводником радиуса  $R$ , крайними условиями для уравнения (8) являются: однородное условие по радиальной координате  $r$

$$E_z(r = R - 0, \varphi) = 0, \quad (10)$$

условие ограниченности при  $r \rightarrow 0$  и условие периодичности по угловой координате  $\varphi$

$$E_z(r, \varphi + 2\pi) = E_z(r, \varphi). \quad (11)$$

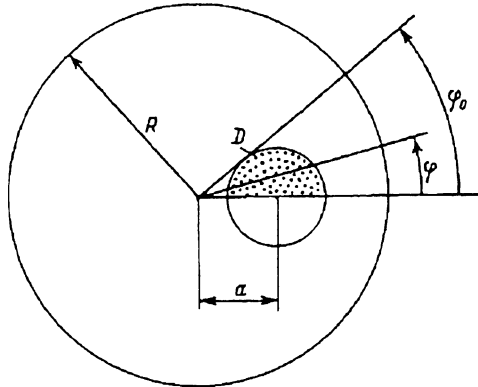


Рис. 1.

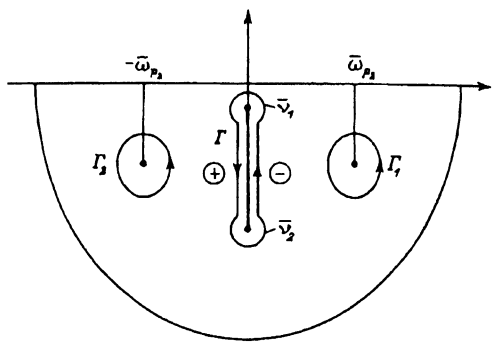


Рис. 2.

Распределение плотности тока пучка зададим для определенности однородным

$$j_b(r, \varphi) = \begin{cases} 1, & (r, \varphi) \in D, \\ 0, & (r, \varphi) \notin D, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$D = \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \\ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi), & \varphi_0 = \arcsin b, \quad b = \frac{r_b}{a}, \end{cases}$$

$r_b$  — радиус пучка,  $a$  — отклонение оси пучка от оси плазменного канала (рис. 1),

$$b \leq 1, \quad j_b(r, -\varphi) = j_b(r, \varphi),$$

$$r_{1,2} = a(\cos \varphi \pm \sqrt{b^2 - \sin^2 \varphi}). \quad (13)$$

Задачу (8), (10), (11) будем решать методом функции Грина, которая удовлетворяет следующему уравнению:

$$\mathcal{L}\tilde{G} = \delta(r - r')\delta(\varphi - \varphi') \quad (14)$$

с краевыми условиями, аналогичными (10), (11).

Рассмотрим сначала случай плазмы без столкновений ( $\nu = 0$ ). Решение уравнения (14) может быть построено с помощью преобразований Фурье–Бесселя и имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(il(\varphi - \varphi')) \left[ -\frac{2r'}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_l(\mu_{ln}r)J_l(\mu_{ln}r')}{(\mu_{ln}^2 + \kappa^2)[J_l'(\mu_{ln}R)]^2} \right] = \\ &= \frac{r'}{2\pi} \sum_l \exp(il(\varphi - \varphi')) \tilde{\Phi}_l(r, r') = -\frac{r'}{2\pi} \sum_l \times \\ &\times \exp(il(\varphi - \varphi')) I_l(\kappa r_{<}) \left[ K_l(\kappa r_{>}) - I_l(\kappa r_{>}) \frac{K_l(\kappa R)}{I_l(\kappa R)} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где  $J_l$  — функция Бесселя действительного аргумента,  $I_l$  — функция Бесселя мнимого аргумента,  $K_l$  — функция Макдональда,  $\mu_{ln}$  — корни функции Бесселя ( $J_l(j_{ln} = \mu_{ln} R) = 0$ ),  $r_< = \min(r, r')$ ,  $r_> = \max(r, r')$ .

Для Фурье-компоненты  $E_z$  по продольной координате получим:

$$\begin{aligned} E_z &= \hat{c} \int_0^R dr' \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \tilde{G} j_b(r', \varphi') = \hat{c} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi' \int_{r_1}^{r_2} dr' \tilde{G} 1 = \\ &= \hat{c} \sum_l \exp(il\varphi) 2 \int_0^{\varphi_0} d\varphi' \cos l\varphi' \frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} dr' r' \tilde{\Phi}_l(r, r') = \\ &= \hat{c} \sum_l \exp(il\varphi) \frac{1}{\pi} \mathcal{L}_l \tilde{\Phi}_l(r, r'), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\hat{c} = 4\pi i e n_b \frac{\kappa^2}{k\varepsilon} \tilde{j}_z.$$

Дифференцируя  $E_z$  по  $r$ , получим выражение для Фурье-компоненты искомой силы, действующей на осевые электроны пучка,

$$\begin{aligned} F(r = a, \varphi = 0) &= -i \frac{e}{\pi} \frac{\hat{c}}{k} \sum_l \mathcal{L}_l \tilde{\Phi}'_r(a, r') \tilde{j}_z = \\ &= 8\kappa^2 \pi n_b e^2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k^2 \varepsilon} \sum_l \mathcal{L}_l \tilde{\Phi}'_r(a, r') \tilde{j}_z = \sum_l A_l G(k) \tilde{j}_z(k), \\ G(k) &= \frac{1}{k^2 \varepsilon}, \quad A_l = 8\pi n_b \mathcal{L}_l \tilde{\Phi}'_r(a, r') e^2 \kappa^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Функция  $G(k)$  имеет своим оригиналом функцию

$$G \div \frac{\lambda}{2} \eta(-\hat{z}) \sin \frac{\hat{z}}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int dk \frac{\exp(ik\hat{z})}{k^2 - 1/\lambda^2}.$$

Вычисляя свертку по Фурье от (17), получим выражение для силы в физическом пространстве

$$F = -\frac{\lambda^2}{2} \left(1 - \cos \frac{\hat{z}}{\lambda}\right) \left[\eta(\hat{z} + c\tau) - \eta(\hat{z})\right] \sum_l A_l = -\mu(z) \frac{\lambda^2}{2} \sum_l A_l. \quad (18)$$

Рассмотрим случай, когда радиус пучка  $r_b$  много меньше радиуса плазменного канала  $R$ . Учитывая слабое изменение в области интегрирования функций  $I_l$  и  $K_l$ , можно приближенно вычислить интегралы

$$\mathcal{L}_l \tilde{\Phi}'_r(a, r') = 2a^2 \tilde{\Phi}'(a, a) \int_0^{\varphi_0} d\varphi' \cos \varphi' \cos l\varphi' \sqrt{b^2 - \sin^2 \varphi'} = 2a^2 \frac{1}{\lambda} B_l C_l, \quad (19)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}'(a, a) &= \frac{1}{2} \left[ \tilde{\Phi}'_r(a, a+0) + \tilde{\Phi}'_r(a, a-0) \right] \equiv \frac{1}{\lambda} B_l \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{I_l(\tilde{a}) I'_l(\tilde{a}) K_l(\tilde{R})}{I_l(\tilde{R})} - \frac{1}{2} \left( I'_l(\tilde{a}) K_l(\tilde{a}) + I_l(\tilde{a}) K'_l(\tilde{a}) \right) \right],\end{aligned}\quad (20)$$

где  $\tilde{a} = a/\lambda$ ,  $\tilde{R} = R/\lambda$ .

В результате для силы  $F$  получим

$$\begin{aligned}F &= -\mu(\dot{z}) 2\pi n_b e^2 \frac{r_b^2}{\lambda} F_0, \\ F_0 &= B_0 + \frac{2}{C_0} \sum_{l=1}^{\infty} C_l B_l, \quad C_0 = \frac{\pi b^2}{4}.\end{aligned}\quad (21)$$

Нетрудно получить формулу, аналогичную (21), для силы в случае, когда сечение пучка содержит осевую линию ( $b > 1$ ),

$$F = -\mu(\dot{z}) 8\pi n_b e^2 \frac{a}{\lambda} r_b \sum_{l=1}^{\infty} B_l \hat{C}_l, \quad (22)$$

где

$$\hat{C}_l = \int_0^{\pi} d\varphi \cos \varphi \cos l\varphi \sqrt{1 - \frac{1}{b^2} \sin^2 \varphi}.$$

При  $b \gg 1$  ( $a \ll r_b$ ),

$$\begin{aligned}\hat{C}_1 &= E \left( \frac{\pi}{2}, \frac{1}{b^2} \right) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{b^2} + O \left( \frac{1}{b^4} \right) \right], \quad \hat{C}_2 = \frac{\pi}{4}, \\ \hat{C}_3 &= \frac{\pi}{16} \frac{1}{b^2} + O \left( \frac{1}{b^4} \right), \quad \hat{C}_l = 0 \quad (l = 4, 5, \dots).\end{aligned}$$

В случае когда граница пучка проходит через ось плазменного канала ( $b = 1$ ), коэффициенты  $\hat{C}_l$  вычисляются в конечном виде и выражение для силы  $F$  имеет вид

$$F = -4\mu(z) n_b e^2 \frac{r_b^2}{\lambda} \left[ B_0 + \frac{\pi}{2} B_1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{4l^2 - 1} B_{2l} \right].$$

Столкновения в плазме ( $\nu \neq 0$ ,  $\omega_p > \nu/2$ ) и конечность релятивистского фактора  $\gamma$  могут быть учтены в рамках рассмотренной схемы решения. Однако при вычислении искомой силы в данном случае удобно использовать первое выражение для функции Грина  $\tilde{G}$  в формуле (15). В этом случае вместо (17) получим

$$F = \sum_l \tilde{A}_l G_1(k) G_2(k) \tilde{j}_z(k), \quad \tilde{A}_l = -32\pi n_b e^2 \frac{a^2}{R^2} C_l, \quad G_1 = \frac{1}{k\varepsilon(ku)},$$

$$G_2 = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{\infty} Q_{ln} \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + j_{ln}^2/R^2)k}, \quad \kappa^2 = \frac{k^2}{\gamma^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{k}{k + i\nu/u}. \quad (23)$$

Сначала определяем оригиналы функций  $G_{1,2}$ , затем последовательно вычисляем свертку по Фурье от полученных оригиналов. Оригинал функции  $G_1$  определяется полюсами, лежащими в нижней полуплоскости,

$$k_{1,2} = \pm k_0 - i\alpha, \quad k_0 = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 \beta^2 - \alpha^2}}, \quad \alpha = \frac{\nu}{2u}.$$

Оригинал функции  $G_2$  для  $\hat{z} < 0$  определяется двумя сериями полюсов, лежащих в нижней полуплоскости на мнимой оси, одна из которых столкновительная ( $\nu$ -серия) расположена на отрезке  $(0, -i\nu/u)$ , вторая — релятивистская ( $\gamma$ -серия) расположена в интервале  $(-i\gamma/\lambda, -i\infty)$ . Обе серии полюсов являются корнями уравнения

$$\kappa^2 R^2 = j_{ln}^2, \quad \kappa^2 = \frac{k^2}{\gamma^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{k}{k + i\nu/u},$$

которое сводится к кубическому уравнению

$$k^3 + i\frac{\nu}{u}k^2 + \frac{\gamma^2}{\lambda^2}(1 + d^{-2})k + i\frac{\nu}{u}\frac{\gamma^2}{\lambda^2}d^{-2} = 0. \quad (24)$$

Корни уравнения (24) могут быть определены, как известно, точно по формулам Кардано. Однако эти формулы не имеют наглядного для анализа вида. Нетрудно получить соответствующие столкновительную и релятивистские серии корней методом возмущения. При получении  $\nu$ -серии следует “возмутить” корни уравнения (24) в пределе  $\gamma \rightarrow \infty$ , а при получении  $\gamma$ -серии — корни уравнения (24) в пределе  $\nu \rightarrow 0$ . В результате получим  $k_{ln}^{(m)} = -iy_{ln}^{(m)}$  ( $m = 1, 2, 3$ ) для  $\nu$ -серии

$$y_{ln}^{(1)} = \frac{\nu}{u} \frac{1}{1 + d^2} \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \left( \frac{\nu}{u} \right)^2 \frac{d^4}{(1 + d^2)^3} \right], \quad d = \frac{R}{\lambda} \frac{1}{j_{ln}}, \quad (25)$$

для  $\gamma$ -серии

$$y_{ln}^{(2,3)} = \pm \frac{\gamma}{\lambda} \frac{\sqrt{1 + d^2}}{d} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\nu}{u} \frac{\lambda}{\gamma} \frac{d(d^2 + 2)}{(1 + d^2)^{3/2}} \right]. \quad (26)$$

Нетрудно заметить, что в формулах (25), (26) при выполнении условия

$$\frac{\nu}{2\omega_p} \frac{1}{\gamma} \ll 1 \quad (\nu < 2\omega_p) \quad (27)$$

можно удерживать лишь первые члены. Таким образом, при выполнении условия (27)  $\nu$ -серия не зависит от релятивистского фактора  $\gamma$ , а  $\gamma$ -серия — от столкновений. Понятно, что  $\gamma$ -серия  $y_{ln}^{(3)}$ , лежащая на положительной части мнимой оси, определяет вклад в электромагнитное

поле перед передним фронтом пучка и поэтому вклада в искомую силу не дает. Следует также иметь в виду, что и точка  $k = 0$  в функции  $G_2$  вклада в силу не дает, так как является устранимой особой точкой.

В результате вычислений окончательно получим

$$F = 8\pi^2 n_b e^2 \frac{r_b}{R} \left[ P_0 + \frac{2}{C_0} \sum_{l=1}^{\infty} C_l P_l \right],$$

$$P_l = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Q}_{ln} \sum_{i=\nu, \gamma} K_{ln}^{(i)} \left[ J(\alpha; \hat{z}) - \exp(y_{ln}^{(i)} \hat{z}) J(\alpha - y_{ln}^{(i)}; \hat{z}) \right],$$

$$\tilde{Q}_{ln} = \frac{j_{ln}}{R^2} \frac{J'_l(j_{ln} a/R) J_1(j_{ln} a/R)}{[J'_l(j_{ln})]^2}, \quad K_{ln}^{(i)} = \varphi(y_{ln}^{(i)}),$$

$$\varphi(x) = \frac{x^2 - 2\alpha x - \gamma^2/\lambda^2}{3x^2 - 4\alpha x - (1 + d^{-2})\gamma^2/\lambda^2},$$

$$J(x; \hat{z}) = \frac{1}{x^2 + k_0^2} \left[ (x + \alpha) - \exp(x\hat{z})(x \cos k_0 \hat{z} + k_0 \sin k_0 \hat{z}) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{k_0} \exp(x\hat{z})(x \sin k_0 \hat{z} - k_0 \cos k_0 \hat{z}) \right] [\eta(\hat{z} + u\tau) - \eta(\hat{z})]. \quad (28)$$

При выполнении условия (27) можно использовать “укороченные” спектры  $y_{ln}^{(\nu, \gamma)}$ . В частности, для величин  $K_{ln}^{(\nu, \gamma)}$  получаем

$$K_{ln}^{(\nu)} = \frac{d^2}{1 + d^2}, \quad K_{ln}^{(\gamma)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + d^2}.$$

Приведем также полученные результаты для бесстолкновительного режима с учетом конечности релятивистского фактора. В этом случае вклад от полюсов  $k_{1,2} = \pm 1/\lambda$  в искомую силу будет определяться формулами (21), (22), в которых следует в случае произвольных значений  $\gamma$  сделать замену  $\lambda \rightarrow \beta\lambda$ , а вклад от  $\gamma$ -серии будет определяться следующим выражением:

$$F^{(\gamma)} = 8\pi^2 n_b e^2 \frac{r_b^2}{R} \left[ \tilde{P}_0 + \frac{2}{C_0} \sum_{l=1}^{\infty} C_l \tilde{P}_l \right],$$

$$\tilde{P}_l = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{1 + (\lambda y_{ln}^{(\gamma)})^2} \tilde{Q}_{ln} \frac{1}{1 + d^2} [1 - \exp(y_{ln}^{(\gamma)} \hat{z})],$$

$$y_{ln}^{(\gamma)} = \frac{\gamma \sqrt{1 + d^2}}{\lambda d},$$

откуда следует, что с ростом  $\gamma$

$$F^{(\gamma)} \sim \frac{1}{\gamma^2}.$$



Рассмотрим случай, когда проводящий кожух, ограничивающий плазменный канал транспортировки РЭП, имеет конечную проводимость. С такой ситуацией мы сталкиваемся, когда "кожух" представляет собой металлический проводник с конечной проводимостью  $\sigma$  либо проводящую среду (плазму).

Для простоты для плазмы в плазменном канале используем модель электронной плазмы без столкновений на неподвижном ионном фоне со свойствами (2) при  $\nu = 0$ . Так же как и выше, рассмотрим установившийся режим в пределе сильного релятивизма ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). Среду в плазменном канале будем обозначать индексом 1, среду в кожухе — индексом 2.

В этом случае для нахождения силы следует решить уравнение для  $E_z$ -компоненты напряженности электрического поля (8) с неоднородными краевыми условиями (задача 1) и однородное уравнение

$$\mathcal{L}B_z = 0 \quad (29)$$

для  $B_z$ -компоненты вектора магнитной индукции с неоднородными краевыми условиями (задача 2).

Для задач 1, 2 краевые условия представляют собой условия непрерывности  $z$ - и  $\varphi$ -компонент электромагнитного поля при переходе через границу раздела сред

$$\begin{aligned} \{E_z\} &= \{B_z\} = \{E_\varphi\} = \{B_\varphi\} = 0, \\ \{f\} &= f(r = R + 0) - f(r = R - 0). \end{aligned} \quad (30)$$

Задача 1, как известно, может быть разделена на две части

$$E_z = E_z^{(1)} + E_z^{(2)},$$

$E_z^{(1)}$  представляет решение уравнения (8) с однородным краевым условием, т.е. построенное выше решение,  $E_z^{(2)}$  — решение однородного уравнения

$$\mathcal{L}E_z^{(2)} = 0 \quad (31)$$

с условиями (30).

Решение уравнений (29), (31) с краевыми условиями (30), как известно, имеет вид

$$E_z^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} A_1 I_l(\kappa_1 r), \quad r \leq R \\ CK_l(\kappa_2 r), \quad r > R \end{array} \right\}, \quad B_z = \left\{ \begin{array}{l} B_1 I_l(\kappa_1 r), \quad r \leq R \\ DK_l(\kappa_2 r), \quad r > R \end{array} \right\},$$

$$\operatorname{Re} \kappa_{1,2} > 0. \quad (32)$$

Четыре неизвестные постоянные могут быть найдены из условий (30) с учетом формул

$$E_\varphi = k \kappa^{-2} \left( \frac{l}{r} E_z + i \beta \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \quad B_\varphi = k \kappa^{-2} \left( \frac{l}{r} B_z - i \beta \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} \right).$$

Рассмотрим случай высокопроводящего материала, когда

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\lambda \gg 1 \leftrightarrow (\sigma \gg \omega_p \text{ или } \omega_{p2} \gg \omega_{p1}).$$

Для искомого констант получим

$$\begin{cases} a_1 A_1 + a_2 B_1 = F, \\ a_2 A_1 + b_2 B_1 = 0, \end{cases} \quad F = i\beta\kappa_1^{-2}\varepsilon_1 \left. \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial r} \right|_{R=0},$$

$$a_1 = i\beta \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} I_l(\kappa_1 R) \sim \sqrt{\sigma} \rightarrow \infty,$$

$$a_2 = \frac{l}{R} \kappa_1^{-2} I_l(\kappa_1 R), \quad b_2 = i\beta \kappa_1^{-1} I_l'(\kappa_1 R),$$

$$C = A_1 \frac{I_l(\kappa_1 R)}{K_l(\kappa_2 R)}, \quad D = B_1 \frac{I_l(\kappa_1 R)}{K_l(\kappa_2 R)},$$

откуда

$$A_1 = \frac{\kappa_2}{\varepsilon_2} \varepsilon_1 \kappa_1^{-2} \frac{1}{I_l(\kappa_1 R)} \left. \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial r} \right|_{R=0} \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \rightarrow 0. \quad (33)$$

Для  $E_z$ -компоненты получим

$$E_z = E_z^{(1)} + E_z^{(2)} = E_z^{(1)} + A_1 I_l(\kappa_1 r). \quad (34)$$

В пределе  $\sigma \rightarrow \infty$  (идеальный проводник) решение (34) переходит в найденное выше, поскольку, как следует из (33),  $A_1 \rightarrow 0$ . Поля  $E_z^{(1)}$  и  $E_z^{(2)}$  дают в искомую силу аддитивный вклад. Поэтому рассмотрим отдельно вклад в силу от составляющей  $E_z^{(2)}$

$$\hat{F}_l = e \frac{i}{k} \frac{\kappa_2}{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} \frac{I_l'(\kappa_1 a)}{I_l(\kappa_1 R)} \left. \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial r} \right|_{R=0}, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial r} \right|_{R=0} &= \frac{\hat{c}}{\pi} \mathcal{L}_l \tilde{\Phi}'_\tau(r=R, r') \tilde{j}_z, \\ \tilde{\Phi}'(R, r') &= \frac{1}{\lambda} I_l(\tilde{r}') \left[ \frac{I_l'(\tilde{R})}{I_l(\tilde{R})} K_l(\tilde{R}) - K_l'(\tilde{R}) \right] > 0. \end{aligned} \quad (36)$$

При вычислении обратного преобразования Фурье по координате  $z$  выделим в (35), (36) функцию

$$\tilde{G}(k) = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{k^2 \varepsilon_2}.$$

Условия  $\text{Re } \kappa_{1,2} > 0$  приводят к появлению на мнимой оси разреза  $\Gamma: [-\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2] \quad (-\bar{\nu}_1 \rightarrow 0)$ .

Таким образом, функция  $G(k)$  имеет в нижней полуплоскости  $k = u + iv$  два полюса

$$k_{1,2} = -i\alpha_2 \pm k_0^{(2)}, \quad k_0^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \alpha_2^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\bar{\nu}_2}{2}, \quad \bar{\nu}_i = \frac{\nu_i}{c}$$

и разрез  $\Gamma$  (рис. 2). Фурье-оригинал  $\hat{G}(\hat{z}) - (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G} \exp(ik\hat{z}) dk$  для области, занятой пучком, может быть найден путем замыкания действительной оси полуокружностью бесконечно большого радиуса, лежащей в нижней полуплоскости, с последующим определением вкладов от полюсов и разреза. На разрезе  $\Gamma$  функция  $\hat{G}(k)$  равна

$$\hat{G}(iv) = -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left( \pm \sqrt{-\frac{v + \bar{\nu}_2}{v + \bar{\nu}_1}} \frac{1}{v^2 + v\bar{\nu}_2 + \lambda_2^{-2}} \right) = \pm f(v). \quad (37)$$

Выбор знака в (37) указан на рис. 2.

В результате для случая  $\omega_{p_2} > \nu_2/2$  получим

$$\left( \bar{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2}{z_{\nu_2}}, \quad z_{\nu_2} = \frac{c}{\nu_2}, \quad \bar{\lambda}_2 < \frac{1}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} F^{(2)}(r = a, \varphi = 0) = & -2\pi e^2 n_b \left( \frac{r_b}{\lambda_1} \right)^2 \lambda_2 \left\{ 2 \int_0^{\bar{\lambda}_2} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_2 - x}{x}} \frac{1 - \exp(x\hat{z}/\lambda_2)}{x^2 - \bar{\lambda}_2 x + 1} dx - \right. \\ & - \frac{1}{4} \frac{1}{k_0^{(2)} \lambda_2} \left[ \frac{1}{2} (12 - 5\bar{\lambda}_2^2) \left( \exp(\alpha_2 \hat{z}) \sin \left( k_0^{(2)} \hat{z} - \frac{\psi}{2} \right) + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right] + \\ & \left. + 4k_0^{(2)} \lambda_2 (1 - \bar{\lambda}_2^2) \left( \cos \frac{\psi}{2} - \exp(\alpha_2 \hat{z}) \cos \left( k_0^{(2)} \hat{z} - \frac{\psi}{2} \right) \right) \right\} B, \quad (38) \end{aligned}$$

где

$$B = \left[ \bar{B}_0 + \frac{2}{C_0} \sum_{l=1}^{\infty} \bar{B}_l C_l \right], \quad \bar{B}_l = \frac{I_l(\bar{a}) I_l'(\bar{a})}{I_l(\bar{R})} \left[ \frac{I_l'(\bar{R})}{I_l(\bar{R})} K_l(\bar{R}) - K_l'(\bar{R}) \right],$$

$$\psi = \arctg \left( \frac{\bar{\lambda}_2}{4} \frac{k_0^{(2)} \lambda_2}{4 - 3\bar{\lambda}_2^2} \right), \quad k_0^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{\nu_2^2}{4c^2}}, \quad \alpha_2 = \frac{\nu_2}{2c}.$$

В бесстолкновительном пределе (38) переходит

$$F^{(2)}(r = a, \varphi = 0) = 2\pi e^2 n_b \left( \frac{r_b}{\lambda_1} \right)^2 \lambda_2 \left[ 1 - \cos \frac{\hat{z}}{\lambda_2} \right] B. \quad (39)$$

В случае  $\omega_{p_2} < \nu_2/2$  ( $\tilde{\lambda}_2 > 1/2$ ) полюса подынтегральной функции  $G(k)$  ложатся на разрез  $\Gamma$  и при интегрировании вклада в силу не дают. В результате интегрирования по разрезу получаем интеграл в смысле главного значения по Коши

$$F^{(2)}(\tau = a, \varphi = 0) = -4\pi e^2 n_b \left(\frac{r_b}{\lambda_1}\right)^2 \lambda_2 \mathcal{B}\mathcal{P} \int_0^{\tilde{\lambda}_2} \frac{dx}{x} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2 - x}{x}} \frac{1 - \exp(x\hat{z}/\lambda_2)}{x^2 - \tilde{\lambda}_2 x + 1}.$$

В ситуации, когда справедлив закон Ома, в простейшей форме  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  разрез  $\Gamma$  определяется интервалом  $(-0, -\infty)$  и интегрирование приводит к результату

$$F^{(2)}(\tau = a, \varphi = 0) = 4\pi e^2 n_b \left(\frac{r_b}{\lambda_1}\right)^2 z_\alpha \mathcal{B}\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dx \sqrt{x}}{x^2(x-1)} \left(1 - \exp\left(x \frac{\hat{z}}{z_m}\right)\right),$$

где

$$z_m = \frac{\nu_m}{c} = \frac{c}{4\pi\sigma},$$

$\nu_m$  — магнитная вязкость.

Из физических соображений понятно, что учет конечной проводимости кожуха будет приводить к уменьшению стабилизирующего отталкивательного эффекта, наибольшее значение которого соответствует условиям идеального проводника. В частности, в бесстолкновительном случае, как следует из формул (21), (39), полная сила, действующая на пучковые электроны, может быть представлена в следующем виде:

$$F = F_1 + F_2,$$

$$F_1 = -A \tilde{F}_1 \left(1 - \cos \frac{\hat{z}}{\lambda_1}\right), \quad F_2 = A \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tilde{F}_2 \left(1 - \cos \frac{\hat{z}}{\lambda_2}\right).$$

Усредняя по длине пучка, получим

$$\left| \frac{\langle F_2 \rangle}{\langle F_1 \rangle} \right| = \frac{\lambda_2 \tilde{F}_2}{\lambda_1 \tilde{F}_1} \equiv \frac{\lambda_2}{\lambda_1} f\left(\frac{a}{\lambda_1}, \frac{R}{\lambda_1}\right). \quad (40)$$

В таблице приведены результаты расчета величин  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$  в зависимости от параметров задачи  $a/\lambda, R/\lambda$  при  $r_b/R = 0.01$ .

Как следует из представленных результатов, величины  $\tilde{F}_1$  и  $\tilde{F}_2$  растут с увеличением отклонения пучка электронов от оси плазменного канала. Причем, начиная с некоторого отклонения,  $\tilde{F}_2$  начинает расти значительно быстрее, чем  $\tilde{F}_1$ . Таким образом, в реальной физической ситуации стабилизирующий эффект может смениться на эффект притяжения пучка к кожуху, что связано с более сильным зарядовым взаимодействием (эффект притяжения) по сравнению с токовым (эффект отталкивания).

$\bar{R} = 0.2$			$\bar{R} = 0.5$			$\bar{R} = 1.0$		
$\bar{a}$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{a}$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{a}$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$
0.020	2.54E+1	5.10E+0	0.050	1.01E+1	8.12E-1	0.10	5.07E+0	1.92E-1
0.040	1.35E+1	1.08E+1	0.100	5.38E+0	1.73E+0	0.20	2.64E+0	4.11E-1
0.060	9.96E+0	1.81E+1	0.150	3.94E+0	2.89E+0	0.30	1.90E+0	6.96E-1
0.080	8.60E+0	2.83E+1	0.200	3.38E+0	4.54E+0	0.40	1.61E+0	1.10E+0
0.100	8.30E+0	4.44E+1	0.250	3.25E+0	7.14E+0	0.50	1.52E+0	1.76E+0
0.120	8.81E+0	7.33E+1	0.300	3.45E+0	1.17E+1	0.60	1.61E+0	2.94E+0
0.140	1.03E+1	1.34E+2	0.350	4.08E+0	2.16E+1	0.70	1.91E+0	5.47E+0
0.160	1.41E+1	3.08E+2	0.400	5.60E+0	4.96E+1	0.80	2.68E+0	1.25E+1
0.180	2.64E+1	1.24E+3	0.450	1.05E+1	1.99E+2	0.90	5.15E+0	5.03E+1
0.185	3.46E+1	2.21E+3	0.480	2.53E+1	1.23E+3	0.92	6.40E+0	7.84E+1
0.190	5.11E+1	4.95E+3	0.490	4.96E+1	4.77E+3	0.94	8.48E+0	1.38E+2
0.194	8.39E+1	1.35E+4	0.492	6.14E+1	7.27E+3	0.96	1.26E+1	3.09E+2
0.196	1.24E+2	2.98E+4	0.494	8.02E+1	1.22E+4	0.98	2.47E+1	1.19E+3
0.198	2.36E+2	1.05E+5	0.495	9.46E+1	1.68E+4	0.99	4.73E+1	4.22E+3

Таблица (продолжение).

$\bar{R} = 2.0$			$\bar{R} = 5.0$		
$\bar{a}$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{a}$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$
0.20	2.51E+0	3.04E-2	0.50	9.99E-1	1.74E-4
0.40	1.28E+0	6.78E-2	1.00	4.99E-1	5.18E-4
0.60	8.87E-1	1.21E-1	1.50	3.33E-1	1.39E-3
0.80	7.14E-1	2.08E-1	2.00	2.51E-1	3.79E-3
1.00	6.47E-1	3.60E-1	2.50	2.04E-1	1.07E-2
1.20	6.63E-1	6.54E-1	3.00	1.80E-1	3.17E-2
1.40	7.92E-1	1.30E+0	3.50	1.86E-1	1.01E-1
1.60	1.16E+0	3.15E+0	4.00	2.69E-1	3.70E-1
1.80	2.41E+0	1.28E+1	4.50	7.13E-1	2.01E+0
1.85	3.26E+0	2.27E+1	4.80	2.26E+0	1.28E+1
1.90	4.94E+0	5.04E+1	4.90	4.76E+0	4.88E+1
1.94	8.26E+0	1.37E+2	4.92	5.96E+0	7.40E+1
1.96	1.23E+1	2.99E+2	4.94	7.88E+0	1.24E+2
1.98	2.36E+1	1.05E+3	4.95	9.33E+0	1.70E+2

Как следует из (40), действие фактора  $\bar{F}_2$ , связанного с конечной проводимостью плазменного кожуха, может быть "отрегулировано" параметром

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sim \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{1/2},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — плотности числа электронов в плазменном канале и проводящем кожухе соответственно.

В частности, этот параметр позволяет в бесстолкновительном случае определить параметры кожуха, при которых может быть использована модель идеального проводника.

#### Список литературы

- [1] Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г. Физика сильно-точных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980. 168 с.
  - [2] Курышев А.П., Соколюк В.Б., Чернов С.В. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 7. С. 1292-1299.
  - [3] Курышев А.П., Чернов С.В. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 11. С. 2106-2112.
  - [4] Чернов С.В., Курышев А.П. Деп. в ВИНТИ. №1075-887. М., 1987. 25 с.
  - [5] Григорьев В.П., Диденко А.В., Исаев Г.П. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. № 6 С. 1254-1260.
  - [6] Владыко В.Б., Дудяк Ю.В. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 8. С. 199-201.
-