1996 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 66, N 9

01;03

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КАПИЛЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛАБО СФЕРОИДАЛЬНОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

© *С.О.Ширяева, А.И.Григорьев*

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия
(Поступило в Редакцию 27 марта 1995 г.)

В рамках теории возмущений методом разложения по малому отклонению равновесной формы капли от сферической рассчитывается спектр капиллярных колебаний заряженной сфероидальной капли и критические условия реализации неустойчивости ее n-й моды по отношению к собственному заряду в виде аналитической зависимости безразмерного параметра Рэлея от величины сфероидальной деформации. Показано, что с увеличением деформации критического условия неустойчивости n-й моды снижаются.

Введение

С проблемой исследования капиллярных колебаний, устойчивости и самодиспергирования сильно заряженной капли приходится сталкиваться в задачах геофизики, технической физики, научного приборостроения, химической технологии. Экспериментальному и теоретическому исследованию этого объекта посвящены сотни публикаций (см., например, обзоры [1,2] и указанную там литературу). Но тем не менее многие вопросы, связанные с этой проблемой, до сих пор остаются мало изученными и в первую очередь это относится к физическому механизму развития рэлеевской неустойчивости в сильно заряженной капле.

Еще в первой работе Рэлея [3] было показано, что из бесконечного набора мод капиллярных колебаний сильно заряженной сферической капли первой претерпевает неустойчивость основная мода, пропорциональная полиному Лежандра $P_2(\cos\theta)$. В итоге неустойчивая капля начинает вытягиваться в фигуру, близкую к вытянутому сфероиду, на ее вершинах образуются заостренные выступы (конусы Тейлора), с вершин которых начинается сброс избыточного заряда в виде серии высокодисперсных сильно заряженных дочерних капелек. Естественно задаться вопросом, как сфероидальное изменение формы первоначально сферической капли скажется на закономерностях реализации неустойчивости более высоких мод капиллярных колебаний, за счет суперпозиции которых собственно и формируются эмиттирующие выступы, с вершин которых идет сброс избыточного заряда. Соответствующая электрогидродинамическая задача сформулирована в [4], но ее решение было проведено лишь на качественном уровне строгости. Тем не менее в [4] показано, что с увеличением эксцентриситета сфероидальной сильно заряженной капли критические условия реализации неустойчивости более высоких, чем основная, мод капиллярных колебаний снижаются. Этот феномен был положен в основу предложенного в [4] физического механизма реализации неустойчивости сильно заряженной капли. В связи с аналитическим количественным исследованием временно́й эволюции формы капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду [5], становится актуальным отыскание решения обсуждаемой задачи (сформулированной в [4]).

Отметим также, что в [6] предпринята попытка решения сходной задачи об отыскании спектра капиллярных колебаний и декрементов затухания для сфероидальной капли вязкой жидкости в однородном внешнем электростатическом поле. Согласно [6], частоты и декременты затухания капиллярных волн в заряженной сфероидальной капле уменьшаются с увеличением эксцентриситета сфероида. Эти результаты не самоочевидны, по крайней мере в части зависимости декрементов от величины эксцентриситета. Представляется целесообразным проверить их с применением методов, отличных от использованных в [6], где расчеты проводились с применением компьютерных программ аналитического счета типа REDUCE, что делает весьма проблематичным прямое повторение расчетов [6].

1. Будем решать задачу о капиллярных колебаниях заряженной вытянутой сфероидальной капли идеальной идеально проводящей жидкости, полагая, что сфероидальность формы капли обусловлена действием неких сторонних сил неэлектрической природы. Решение проведем в безразмерных переменных, положив радиус исходной сферической формы капли R, плотность ρ и поверхностное натяжение σ жидкости равными единице $R = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$. При этом в качестве единиц измерения расстояния, времени, заряда, давления и скорости получим характерные величины

$$r_* = R, \quad t_* = R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2}, \quad Q_* = R^{3/2}\sigma^{1/2},$$

$$P_* = R^{-1}\sigma, \quad U_* = R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}. \tag{1}$$

Уравнение возмущенной капиллярным волновым движением поверхности вытянутого сфероида в линейном по квадрату эксцентриситета приближении в сферических координатах запишем в виде

$$r = r(\theta) + \xi(\theta,\varphi,t) \approx 1 + e^2 \cdot h(\theta) + \xi(\theta,\varphi,t), \tag{2}$$

$$r(\theta) = \frac{(1-e^2)^{1/6}}{(1-e^2\cos^2\theta)^{1/2}}, \quad h(\theta) = \frac{1}{6}\left(3\cos^2\theta - 1\right). \tag{3}$$

Здесь e — эксцентриситет сфероида; $\xi(\theta, \varphi, t)$ — возмущение равновесной сфероидальной поверхности капли, вызванное капиллярными колебаниями, происходящими из-за теплового движения молекул и имеющими амплитуду $\sim\sqrt{(kT)/\sigma}$ (здесь k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Отметим также, что для большинства жидкостей амплитуда таких капиллярных колебаний порядка десятых долей нанометра.

Нижеследующий анализ проведем в рамках теории возмущений путем разложения по малым параметрам e^2 и ξ с точностью до членов, имеющих порядок малости $\sim e^2$, ξ и $e^2\xi$, т.е. в линейном приближении по каждому из них. Отметим, что малые параметры e^2 и ξ являются независимыми, причем $e^2 \gg \xi$. В этой связи казалось бы, что, сохраняя слагаемые $\sim e^2\xi$, мы должны учесть и слагаемые $\sim e^4$. Такой вывод совершенно справедлив, но, как будет видно из нижеследующего анализа, вклад в искомое дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний заряженной сфероидальной капли внесут лишь слагаемые $\sim\xi$ и $e^2\xi$, а слагаемые $\sim e^2$, e^4 исчезнут при учете кинематического граничного условия (содержащего частную производную по времени). В этой связи удержание в нижеследующих расчетах слагаемых $\sim e^4$ привело бы лишь к неоправданному увеличению громоздкости математической записи проводимых рассуждений.

Зависимость поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, поля давлений $P(\mathbf{U}, t)$, и возмущения $\xi(\theta, \varphi, t)$ от времени будем принимать экспоненциальной $\sim \exp(st)$.

2. Выпишем систему уравнений гидродинамики, описывающих движение идеальной жидкости в капле, вызванное малым возмущением формы ее равновесной поверхности $\xi(\theta, \varphi, t)$ и поэтому характеризуемое полем скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, имеющим тот же порядок малости, что и ξ. Такая система состоит из линеаризованного уравнения Эйлера и условия несжимаемости жидкости

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -P(\mathbf{U}, t), \tag{4}$$

$$\Delta \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{5}$$

Здесь $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$; $P(\mathbf{U}, t)$ — добавка к давлению внутри жидкости, порождаемая капиллярным волновым движением и, следовательно, имеющая первый порядок малости по $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ (т.е. по ξ).

На поверхности капли, имеющей форму, описываемую уравнением (2), должны выполняться граничные условия: кинематическое

$$\left[\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla F\right]\bigg|_{r=1+e^2 \cdot h(\theta)+\xi} = 0,$$

$$F = r - \left[1 + e^2 \cdot h(\theta) + \xi(\theta, \varphi, t)\right],$$

динамическое

$$[-P(\mathbf{U}, t) - P_E(\xi, t) + P_\sigma(\xi, t)]|_{r=1+e^2 \cdot h(\theta)+\xi} = 0,$$

где $P_E(\xi,t)$ и $P_\sigma(\xi,t)$ — добавки к давлению электрического поля и давлению сил поверхностного натяжения, вызванные искажением $\xi(\theta,\varphi,t)$ равновесной поверхности и имеющие первый порядок малости по ξ.

Перепишем кинематическое граничное условие в терминах функций $\xi(\theta,\varphi,t)$ и $\Psi(\mathbf{r},t)$:

$$\left[-\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\Psi}{\partial r}-e^2-\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-\frac{\partial h}{\partial\theta}\right]\Bigg|_{r=1+e^2\cdot h(\theta)+\xi}=0. \tag{6}$$

Динамическое граничное условие с учетом соотношения (4) примет вид

$$\left[\frac{\partial\Psi}{\partial t}-P_E(\xi)+P_\sigma(\xi)\right]\Bigg|_{r=1+e^2\cdot h(\theta)+\xi}=0. \tag{7}$$

Решение уравнения Лапласа (5) для потенциала $\Psi(\mathbf{r},t)$, регулярное в точке $r=0$, в сферических координатах естественно искать в виде ряда по нормированным сферическим функциям $Y_{km}(\theta,\varphi)$

$$\Psi(\mathbf{r},t)=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}C_{km}r^kY_{km}(\theta,\varphi)\exp(st). \tag{8}$$

Поскольку возмущение равновесной поверхности капли $\xi(\theta,\varphi,t)$ связано с потенциалом поля скоростей $\Psi(\mathbf{r},t)$ кинематическим граничным условием (6), то логично и функцию $\xi(\theta,\varphi,t)$ искать в виде разложения по сферическим функциям

$$\xi(\theta,\varphi,t)=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}Z_{km}\cdot Y_{km}(\theta,\varphi)\exp(st). \tag{9}$$

В выражениях (8), (9) суммирование начинается со значения $k=2$ в силу требований несжимаемости жидкости и неподвижности центра масс капли [7].

Прежде чем воспользоваться граничными условиями (6), (7), выпишем входящие в (7) добавки к давлениям $P_E(\xi,t)$ и $P_\sigma(\xi,t)$.

3. Давление сил поверхностного натяжения на поверхность капли, описываемую выражением (2), несложно рассчитать, используя известную формулу для средней кривизны поверхности H [8],

$$P_\sigma(\xi,t)=2H=[\nabla\mathbf{n}]\,|_{r=1+e^2\cdot h(\theta)+\xi},$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности $F=r-[1+e^2h(\theta)+\xi]=0$ определяется соотношением

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla F}{|\nabla F|}.$$

В итоге для добавки к давлению сил поверхностного натяжения, линейной по e^2, ξ, $e^2 \cdot \xi$, получим выражение

$$P_\sigma(\xi)|_{r=1+e^2h(\theta)+\xi} \approx \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\Big\{ \left[(k-1)(k+2) - e^2 2(k^2+k+4)\varkappa_k^m\right] Z_{km} -$$

$$- e^2(k^2-3k+6)\mu_{k-2}^m Z_{k-2,m} - e^2(k^2+5k+10)\zeta_{k+2}^m Z_{k+2,m}\Big\} Y_{km}(\theta,\varphi)\exp(st), \tag{10}$$

где

$$\varkappa_k^m = \frac{[k(k+1)-3m^2]}{3(2k-1)(2k+3)},$$

$$\mu_k^m = \frac{1}{(2k+3)}\sqrt{\frac{[(k+1)^2-m^2][(k+2)^2-m^2]}{(2k+1)(2k+5)}}, \tag{11}$$

$$\zeta_k^m = \frac{1}{(2k-1)}\sqrt{\frac{[k^2-m^2][(k-1)^2-m^2]}{(2k+1)(2k-3)}}.$$

Давление электрического поля на поверхность капли определяется известным выражением [9]

$$P_E|_{r=1+e^2\cdot h(\theta)+\xi} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E})^2\Big|_{r=1+e^2\cdot h(\theta)+\xi}. \tag{12}$$

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в окрестности заряженной слабосфероидальной возмущенной капиллярными колебаниями поверхности капли представим в виде разложения

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \delta_1\mathbf{E} + \delta_2\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi_0 - \boldsymbol{\nabla}(\delta_1\Phi) - \boldsymbol{\nabla}(\delta_2\Phi), \tag{13}$$

где $\mathbf{E}_0$ и Φ_0 — напряженность поля и потенциал в окрестности заряженной сферы имеют нулевой порядок малости по e^2 и ξ; $\delta_1\mathbf{E}$ и $\delta_1\Phi$ — добавки к напряженности поля и потенциалу, имеющие порядок малости $\sim e^2$ и $\sim\xi$; $\delta_2\mathbf{E}$ и $\delta_2\Phi$ — добавки, имеющие порядок малости $\sim e^2\cdot\xi$.

Потенциалы Φ_0, $\delta_1\Phi$, $\delta_2\Phi$ являются решениями уравнения Лапласа, регулярными на бесконечности, удовлетворяющими граничным условиям

$$\Phi_0|_{r=1} = Q,$$
$$\delta_1\Phi|_{r=1} = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\Big|_{r=1}\left[e^2\cdot h(\theta)+\xi\right],$$
$$\delta_2\Phi|_{r=1} = -\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial^2 r}\Big|_{r=1} e^2\cdot h(\theta)\xi - \frac{\partial(\delta_1\Phi)}{\partial r}\Big|_{r=1}\left[e^2\cdot h(\theta)+\xi\right].$$

Несложно найти, что решения сформулированных электростатических задач имеют вид

$$\Phi_0 = \frac{Q}{r};$$

$$\delta_1\Phi = e^2 \cdot h(\theta)\frac{Q}{r^3} + Q\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} Z_{km} r^{-(k+1)} Y_{km}(\theta,\varphi),$$

$$\delta_2\Phi = Qe^2\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\Big[(k+2)\varkappa_k^m Z_{km} + \frac{k}{2}\mu_{k-2}^m Z_{k-2,m} +$$

$$+ \frac{1}{2}(k+4)\zeta_{k+2}^m Z_{k+2,m}\Big] r^{-(k+1)} Y_{km}(\theta,\varphi). \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (12) и (13), для добавки к давлению электрических сил, линейной по ξ, получим выражение

$$P_E(\xi)|_{r=1+e^2h(\theta)+\xi} \approx \frac{Q^2}{4\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\Big\{\left[(k-1) + e^2(k-4)\varkappa_k^m\right] Z_{km} +$$

$$+ e^2\frac{1}{2}(k-5)\mu_{k-2}^m Z_{k-2,m} + e^2\frac{1}{2}(k-7)\zeta_{k+2}^m Z_{k+2,m}\Big\} Y_{km}(\theta,\varphi)\exp(st). \quad (15)$$

4. Теперь, используя решения (8), (9) и выражения (10) и (15) и учитывая ортонормированность сферических функций $Y_{km}(\theta,\varphi)$, из кинематического (6) и динамического (7) граничных условий получим систему уравнений для определения коэффициентов C_{km} и Z_{km} в разложениях (8) и (9)

$$-sZ_{km} + \left[k + e^2(k(k-1)-3)\varkappa_k^m\right] C_{km} + e^2\frac{1}{2}(k-2)(k-1)\mu_{k-z}^m C_{k-2,m} +$$

$$+ e^2\frac{1}{2}\left[(k+2)(k-1)-2\right]\zeta_{k+2}^m C_{k+2,m} = 0,$$

$$s\Big\{\left[1 + e^2 k\varkappa_k^m\right] C_{km} + e^2\frac{1}{2}(k-2)\mu_{k-2}^m C_{k-2,m} + e^2\frac{1}{2}(k+2)\times$$

$$\times\zeta_{k+2}^m C_{k+2,m}\Big\} + \Big\{(k-1)(k+2)\alpha_k - e^2\left[3k^2 + (k-4)(k+2)\alpha_k\right]\varkappa_k^m\Big\} Z_{km} -$$

$$- e^2\left[(3k^2-9k+2) + (k-5)(k+2)\alpha_k\right]\frac{1}{2}\mu_{k-2}^m Z_{k-2,m} -$$

$$- e^2\left[(3k^2-5k+6) - (k-7)(k+2)\alpha_k\right]\frac{1}{2}\zeta_{k+2}^m Z_{k+2,m} = 0,$$

$$\alpha_k = 1 - \frac{W}{(k+2)};\quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi}. \qquad (16)$$

Полученная система однородных уравнений имеет нетривиальное решение лишь в том случае, если ее определитель равен нулю. Это условие позволяет выписать интересующее нас дисперсионное уравнение, связывающее между собой частоты мод капиллярных колебаний капли с номерами мод. Несложно убедиться в том, что при решении в линейном по e^2 приближении в системе (16) можно пренебречь взаимодействием различных мод, т. е. отбросить в уравнениях слагаемые, пропорциональные коэффициентам $C_{k+2,m}$, $C_{k-2,m}$, $Z_{k+2,m}$, $Z_{k-2,m}$. В этом случае дисперсионное уравнение принимает вид

$$s^2 \approx -\left\{k(k-1)(k+2)\alpha_k - e^2 3\left[k^3 + (2k-1)(k+2)\alpha_k\right]\varkappa_k^m\right\}. \qquad (17)$$

Таким образом, увеличение экцентриситета капли ведет к уменьшению частот ее собственных капиллярных колебаний.

Из выражения (17) можно получить и критическое значение параметра W_{cr}, при превышении которого проявляется неустойчивость капли по отношению к собственному заряду [3] (это значение W, для которого квадрат частоты обращается в нуль $s^2 = 0$)

$$W \approx (k+2)\left[1 - e^2\frac{3k^2}{(k-1)(k+2)}\varkappa_k^m\right].$$

Поскольку минимальные значения индексов $k = 2$, $m = 0$, то для критического значения W найдем

$$W_{\text{cr}} \approx 4\left[1 - \frac{2}{7}e^2\right]. \qquad (18)$$

5. Чтобы учесть взаимодействие различных мод, сведем систему двух уравнений (16) к одному, выразив из первого уравнения коэффициент Z_{mk} и подставив его во второе уравнение системы. В результате получим систему алгебраических уравнений

$$\left\{s^2\left[1 + e^2\beta_{km}^{(1)}\right] + \left[k\gamma_{km} + e^2\eta_{km}^{(1)}\right]\right\}C_{km} +$$

$$+ e^2\left\{s^2\beta_{km}^{(2)} + \eta_{km}^{(2)}\right\}C_{k-2,m} + e^2\left\{s^2\beta_{km}^{(3)} + \eta_{km}^{(3)}\right\}C_{k+2,m} = 0, \qquad (19)$$

где использованы обозначения

$$\beta_{km}^{(1)} = k\varkappa_k^m; \quad \beta_{km}^{(2)} = \frac{1}{2}(k-2)\mu_{k-2}^m, \quad \beta_{km}^{(3)} = \frac{1}{2}(k+2)\zeta_{k+2}^m,$$

$$\gamma_{km} = (k-1)(k+2)\alpha_k,$$

$$\eta_{km}^{(1)} = \left\{\left[k^2(k-1) - 3(2k-1)\right](k+2)\alpha_k - 3k^3\right\}\varkappa_k^m,$$

$$\eta_{km}^{(2)} = \left\{\left[k(k-1) - 2(k-3)\right](k+2)\alpha_k - (3k^2 - 9k + 2)\right\}\frac{1}{2}(k-2)\mu_{k-2}^m,$$

$$\eta_{km}^{(3)} = \left\{\left[(k-1)^2(k-3) - 2(k-1)\right]\alpha_k - (3k^2 + 5k + 6)\right\}\frac{1}{2}(k+2)\zeta_{k+2}^m.$$

Соотношение (19) представляет собой бесконечную систему связанных однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, когда ее определитель обращается в нуль. Дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний с учетом взаимодействия мод получим, приравнивая нулю определитель системы (19). В итоге получится алгебраическое уравнение бесконечного порядка. Решение такого уравнения естественно искать методом последовательных приближений, раскрывая последовательно определители 1×1, 2×2 и т.д. (Очевидно, что раскрытие определителя 1×1 соответствует ситуации пренебрежения взаимодействием мод, рассмотренной в предыдущем пункте).

Заметим, что уравнение (19) выписано с точностью до членов $\sim e^2 \xi$ (т.к. Ψ и ξ имеют одинаковый порядок малости). Таким образом, порядок малости слагаемых, сохраненных в (19), определяется соотношением величин ξ и e^2. Поэтому, приняв, что ξ не больше e^2 , мы получим, что точность уравнения (19) не ниже, чем $\sim e^4$ и, следовательно, вычисление дисперсионного соотношения и критического условия реализации неустойчивости можно проводить с точностью до слагаемых $\sim e^4$.

Выписывание дисперсионного уравнения (даже в простейшем случае при раскрытии определителя 2×2) является громоздкой задачей. Но т.к. мы ищем критическую зависимость $W_{\text{cr}} = W_{\text{cr}}(e^2)$, на которой квадрат частоты обращается в нуль поскольку имеем дело с асимметричной (транскритической) бифуркацией [10]), то, положив в дисперсионном уравнении $s^2 = 0$, получим уравнение для определения W_{cr}

$$\begin{vmatrix} 2\gamma_{2m} + e^2 \eta_{2m}^{(1)} & , & e^2 \eta_{2m}^{(3)} \\ e^2 \eta_{4m}^{(2)} & , & 4\gamma_{4m} + e^2 \eta_{4m}^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда с точностью $\sim e^4$ можно получить искомую зависимость $W_{\text{cr}} = W_{\text{cr}}(e^2)$ в аналитическом виде

$$W_{\text{cr}} \approx 4 \left[1 - 0.286 e^2 + 0,046 e^4 \right].$$

Сравнение (20) с (18) позволяет видеть, что учет взаимодействия мод дает лишь малую поправку к критической величине параметра W, полученного в пренебрежении взаимодействием, как и должно быть в теории возмущений.

6. Подводя итог вышесказанному, отметим, что в проведенном анализе получена в аналитическом виде (а не в графическом, как в [4]) зависимость критического значения параметра Рэлея W от величины эксцентриситета e заряженной сфероидальной капли для n-й моды капиллярных колебаний в линейном по e^2 приближении, а для основной моды — и в квадратичном по e^2 приближении. В качественном отношении полученные результаты согласуются с данными [4] и подтверждают предложенный в [4] механизм образования на вершинах сфероидальной капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду, эмиттирующих выступов (конусов Тейлора), с вершин которых идет сброс избыточного заряда [2]. Отметим также, что полученные аналитические зависимости $W = W(e^2)$ справедливы лишь при малых значениях сфероидальной деформации $e^2 \ll 1$. Тем не менее качественные тенденции эволюции критических условий реализации неустойчивости n-й моды капиллярных колебаний капли при увеличении e^2 должны сохраниться и в области значений e^2, не удовлетворяющих условию $e^2 \ll 1$, в силу очевидного требования монотонности зависимости $W = W(e^2)$.

Список литературы

[1] *Коженков В.И., Фукс Н.А.* // Успехи Химии. 1976. Т. 45, №.12. С. 2274–2284.
[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–20.
[3] *Rayleigh (Lord Strutt J.W.).* // Phyl. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
[4] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55, Вып. 7. С. 1273–1278.
[5] *Ширяева С.О., Григорьева И.Д.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 6. С. 1–5.
[6] *Cheng K.J.* // Phys. Lett. 1985. Vol. 112 A. N. 11. P. 392–396.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[8] *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982 620 с.
[10] *Григорьев А.И., Дорошенко Д.Н.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 10–15.