

01;03

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

© С.О.Ширяева, О.А.Григорьев, А.И.Григорьев

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия
(Поступило в Редакцию 16 марта 1995 г.)

Исследованы закономерности существования и устойчивости капиллярно-гравитационных волн в стратифицированной двухслойной жидкости с заряженной границей раздела. Показано, что величины инкрементов неустойчивостей Тонкса-Френкеля и Рэлея-Тейлора уменьшаются, а декременты затухания волновых и аperiodических движений увеличиваются с увеличением отношения вязкостей и плотностей верхней и нижней жидкостей. Минимальная длина капиллярной волны, не гасящейся вязкостью, быстро растет как с увеличением отношения вязкостей, так и с увеличением отношения плотностей.

Введение

Задача об устойчивости границы раздела двух несмешивающихся жидкостей, различающихся своими физико-химическими характеристиками, неоднократно решалась в различных предельных ситуациях в связи с многочисленными приложениями в физических, технических и технологических проблемах. Так, эта задача возникает при объяснении эффекта "мертвого моря" [1], в теории неустойчивости Рэлея-Тейлора в имплозийном методе атомного взрыва [2], в инерционном термоядерном синтезе [3], при исследовании устойчивости границ раздела многослойной жидкости, движущейся с ускорением [4]. Но, несмотря на важность проблемы, ее исчерпывающего решения пока не существует, причиной чего является громоздкость получающегося даже в идеализированных ситуациях дисперсионного уравнения, допускающего аналитический анализ лишь в асимптотических ситуациях. Если же рассмотреть еще более общую задачу — об устойчивости границы раздела двух несмешивающихся жидкостей при наличии на ней нескомпенсированного электрического заряда с поверхностной плотностью, достаточной для реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля [5-7], то возможности аналитического метода исследования еще более снижаются. Тем не менее попытки отыскать решения такой общей задачи предпринимались неоднократно (см., например, [8-10]) в связи с

ее приложениеммик различным физико-техническим проблемам. Однако дисперсионные соотношения задачи были выписаны и частично проанализированы лишь в пренебрежении вязкости обеих жидкостей $[10-12]$ или вязкостью одной из них $[8,9]$. Проводились и экспериментальные исследования обсуждаемой проблемы $[13-15]$, позволившие собрать феноменологические данные о некоторых закономерностях колебаний заряженной границы раздела жидкостей и реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля на ней. Следует отметить, что физические механизмы развития неустойчивости Тонкса-Френкеля и в простейшей ситуации границы электропроводной жидкости с вакуумом исследованы в теоретическом отношении не полностью, несмотря на неослабевающий интерес к явлению $[16-17]$. Причина такого положения дел с исследованием обсуждаемого феномена состоит в его нелинейности, не всегда удачном выборе переменных и характерных безразмерных параметров, а также в слабом использовании численных методов.

В связи со сказанным ниже приводится решение задачи об исследовании устойчивости волнового движения в системе двух несмешивающихся жидкостей с различными плотностями, вязкостями и электропроводностями с введением минимального количества упрощений и использованием численного анализа получающегося дисперсионного уравнения.

1. Нижеследующее рассмотрение проведем на модели несжимаемых вязких жидкостей, заполняющих в поле силы тяжести все пространство. Пусть невозмущенная граница раздела между жидкостями совпадает с плоскостью XOY декартовой системы координат, ось Z которой направлена вверх, в направлении, противоположном направлению действия поля сил тяжести. Верхнюю жидкость с кинематической вязкостью ν_1 , плотностью ρ_1 , заполняющую полупространство $z > 0$, будем считать неэлектропроводной с диэлектрической проницаемостью ϵ . Нижнюю жидкость с кинематической вязкостью ν_2 , плотностью ρ_2 , заполняющую полупространство $z < 0$, будем считать идеально электропроводной. Примем также, что невозмущенная граница раздела жидкостей однородно заряжена с поверхностной плотностью заряда κ и обладает поверхностным натяжением с коэффициентом σ (т.е. используем ту же схему, что и в задаче $[9]$ о неустойчивости Тонкса-Френкеля на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей). В итоге для отыскания условий проявления неустойчивости в описанной системе можно записать линеаризованную систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1} \nabla P_1 + \nu_1 \cdot \Delta \mathbf{U}_1 + \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2} \nabla P_2 + \nu_2 \cdot \Delta \mathbf{U}_2 + \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_2 = 0, \quad (3), (4)$$

с граничными условиями

$$z \rightarrow -\infty : \quad \mathbf{U}_1 \rightarrow 0, \quad (5)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \mathbf{U}_2 \rightarrow 0. \quad (6)$$

В этих выражениях $P_j = P_j(\mathbf{r}, t)$ — давление внутри j -той жидкости, $\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_j(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей в ней; \mathbf{g} — ускорение свободного падения.

На границе раздела сред, возмущенной капиллярным волновым движением, уравнение которой имеет вид $z = \zeta(x, t)$, должны удовлетворяться граничные условия для скоростей

$$\mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t), \quad (7)$$

а также кинематические

$$U_{1z} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (8)$$

$$U_{2z} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (9)$$

и динамические условия для касательных

$$\mu_1 (\tau_1(\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{U}_1 + \mathbf{n}_1(\tau_1 \nabla) \mathbf{U}_1) = \mu_2 (\tau_2(\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{U}_2 + \mathbf{n}_2(\tau_2 \nabla) \mathbf{U}_2), \quad (10)$$

и нормальной

$$P_1 - P_2 + 2\nu_2 \rho_2 \frac{\partial U_{2z}}{\partial z} - 2\nu_1 \rho_1 \frac{\partial U_{1z}}{\partial z} = P_\kappa + P_\sigma \quad (11)$$

компонент тензора напряжений.

В этих соотношениях $\zeta(x, t)$ — возмущение равновесной плоской поверхности жидкости; $P_\sigma = -\sigma(\partial^2 \zeta / \partial x^2)$ и $P_\kappa = -4\pi \varepsilon^{-1} \kappa k^2 \zeta$ — давление сил поверхностного натяжения под искривленной волновым движением плоской поверхностью жидкости и электростатическое давление на нее из-за наличия поверхностного заряда [18, 19]; k — волновое число; τ_j и \mathbf{n}_j — орты касательной и нормали к поверхности j -той жидкости; $\mu_j = \nu_j \rho_j$.

В дальнейшем рассмотрении течения в жидкостях будем искать, разделяя поле скоростей $\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_j(\mathbf{r}, t)$ на две компоненты: потенциальную (с потенциалом скоростей $\psi_j(\mathbf{r}, t)$) и вихревую (описываемую функцией тока) [20]. Тогда выражения для давлений P_1 и P_2 в верхней и нижней жидкостях в (11) можно записать в виде

$$P_1 = -\rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho_1 g \zeta, \\ P_2 = -\rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \rho_2 g \zeta. \quad (12)$$

2. Решение задачи (1), (12) естественно искать в виде [20]

$$U_{1x}(x, z, t) = (ikB_1 \exp(-kz) - l_1 C_1 \exp(-l_1 z)) \exp(ikx - i\omega t), \\ U_{1z}(x, z, t) = (-kB_1 \exp(-kz) + ikC_1 \exp(-l_1 z)) \exp(ikx - i\omega t), \\ U_{2x}(x, z, t) = (ikB_2 \exp(kz) - l_2 C_2 \exp(l_2 z)) \exp(ikx - i\omega t),$$

$$U_{2z}(x, z, t) = (k B_2 \exp(kz) + ik C_2 \exp(l_2 z)) \exp(ikx - i\omega t),$$

$$l_1^2 = k^2 - i\omega \nu_1^{-1}, \quad l_2^2 = k^2 - i\omega \nu_1^{-1},$$

$$\zeta(x, t) = E \exp(ikx - i\omega t), \quad (13)$$

где ω — комплексная частота; B_j , C_j и E — константы.

Подставляя (13) в условия (6)–(12), можно получить дисперсионное соотношение для волн в анализируемой системе

$$\omega^2(\eta K_1 - K_2) + \omega 2ik \left\{ \nu_1 \eta \left(k K_1 - L_1 \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu_1 k^2}} \right) - \right. \\ \left. - \nu_2 \left(k K_2 + L_2 \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu_2 k^2}} \right) \right\} = \omega_0^2,$$

$$I_2 = -\frac{2 + 2\lambda\eta Z_1}{(1 - Z_2^2) + \lambda\eta \cdot (1 - Z_2)(1 + Z_1)}, \quad Z_j = \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu_j k^2}},$$

$$K_1 = -\frac{Z_1 + Z_1 Z_2 + (Z_2 - 1) + \lambda\eta (2 - (1 - Z_1^2))}{((1 + Z_2) + \lambda\eta(1 + Z_1))(1 - Z_1)},$$

$$K_2 = -1 - L_2, \quad L_1 = -1 + K_1, \quad \eta = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \lambda = \frac{\nu_1}{\nu_2},$$

$$\omega_0^2 = k [g(1 - \eta) + \rho_2^{-1} \sigma \cdot k^2 - k \cdot 4\pi \varepsilon^{-1} \rho_2^{-1} \cdot x^2]. \quad (14)$$

Ввиду громоздкости полученного дисперсионного соотношения его дальнейший анализ проведем численно, приведя предварительно к безразмерному виду

$$y^2(\eta K_1 - K_2) + 2iy \left\{ \eta \lambda \left((K_1 - L_1 \sqrt{1 - \frac{iy}{\lambda}}) - (K_2 + L_2 \sqrt{1 - iy}) \right) \right\} - \alpha^2 = 0,$$

$$y = \frac{\omega}{\nu_2 k^2}, \quad \alpha^2 = \frac{\omega_0^2}{\nu_2^2 \cdot k^4}. \quad (15)$$

Имея в виду, что частота ω является комплексной величиной и входит в (15) под знак радикала, будем принимать во внимание то обстоятельство, что функция $\omega = \omega(k)$ (функция $y = y(\alpha^2)$ в безразмерных переменных) является многозначной аналитической функцией, определенной на двухлистной римановой поверхности. Поэтому нижеследующие численные расчеты по дисперсионному уравнению (15) проделаем для верхнего листа римановой поверхности, проводя на ней необходимые для исключения многозначности разрезы.

3. В отличие от обычной неустойчивости Тонкса–Френеля в ее классическом виде [5,6], когда идеально проводящая жидкость граничит с вакуумом и ее поверхность несет электрический заряд, равномерно распределенный по безграничной плоской свободной поверхности, в

ситуации, анализируемой в настоящей работе, вакуум заменен диэлектрической несжимаемой вязкой жидкостью, играющей таким образом роль внешней среды. Такие характеристики среды, как диэлектрическая проницаемость, плотность и вязкость, будут сказываться на закономерностях реализации волнового движения в рассматриваемой системе и на особенностях развития неустойчивости границы раздела сред.

Отметим, что в анализируемой системе возможно возникновение неустойчивостей границы раздела: по отношению к величине поверхностного заряда κ при достаточно больших κ (эту неустойчивость будем называть неустойчивостью Тонкса-Френкеля) и по отношению к действию силы тяжести при $\rho_1 > \rho_2$ (это будет неустойчивость Рэлея-Тейлора). Естественно, что возможна и комбинация этих двух неустойчивостей.

Из (14) несложно видеть, что критические условия реализации неустойчивости границы раздела сред, определяющиеся требованием прохождения ω_0^2 через нуль, не зависят от вязкостей обеих сред. Зависимости же критических условий реализации неустойчивости поверхности раздела по отношению к величине поверхностного заряда от диэлектрической проницаемости верхней жидкости ϵ , а также обеих неустойчивостей от отношения плотностей η видны и легко выписываются аналитически из соотношения $\omega_0^2 = 0$.

Отметим, что в использованных безразмерных обозначениях графические представления ветвей, неустойчивых по отношению к заряду и силе тяжести, совпадают (как видно из приведенных ниже графиков).

Влияние диэлектрической проницаемости верхней жидкости на величины инкрементов неустойчивостей, декрементов затухания и частот реализующихся волновых движений осуществляется через α^2 (через ω_0^2) в соответствии с зависимостями, представленными на графиках.

Влияние вязкости верхней жидкости (параметра λ) на характеристики волновых и апериодических движений жидкости можно проследить при $\eta = 0.1$ (когда верхняя жидкость легкая и речь идет о неустойчивости Тонкса-Френеля) по рис. 1-4 и при $\eta = 2$ (когда верхняя жидкость более тяжелая, чем нижняя, и речь идет о неустойчивости Рэлея-Тейлора) по рис. 5-7. Из этих рисунков видно, что при $\eta \ll 1$ влияние отношения вязкостей сред на величину инкремента неустойчивости (часть кривой 2 при $\alpha^2 < 0$) при изменении λ в интервале от нуля до $\lambda \approx 10$ сводится к ее незначительному уменьшению. При больших значениях λ эта зависимость становится более отчетливой и при изменении λ от 10 до 25 приводит к снижению инкремента примерно в два раза.

При $\eta = 2$ заметная зависимость инкремента неустойчивости от λ проявляется уже при $\lambda < 10$. Имея в виду, что при $\eta \ll 1$ и $\eta > 1$ речь идет о разных неустойчивостях, можно сказать, что величина инкремента неустойчивости Рэлея-Тейлора сильнее зависит от отношения вязкостей сред чем величина инкремента неустойчивости Тонкса-Френкеля.

Декременты волновых движений, определяющиеся кривой 1 на зависимостях $\text{Im } y = \text{Im } y(\alpha^2)$, мало меняются по абсолютной величине с изменением λ , но при $\lambda \geq 10$ соответствующая зависимость

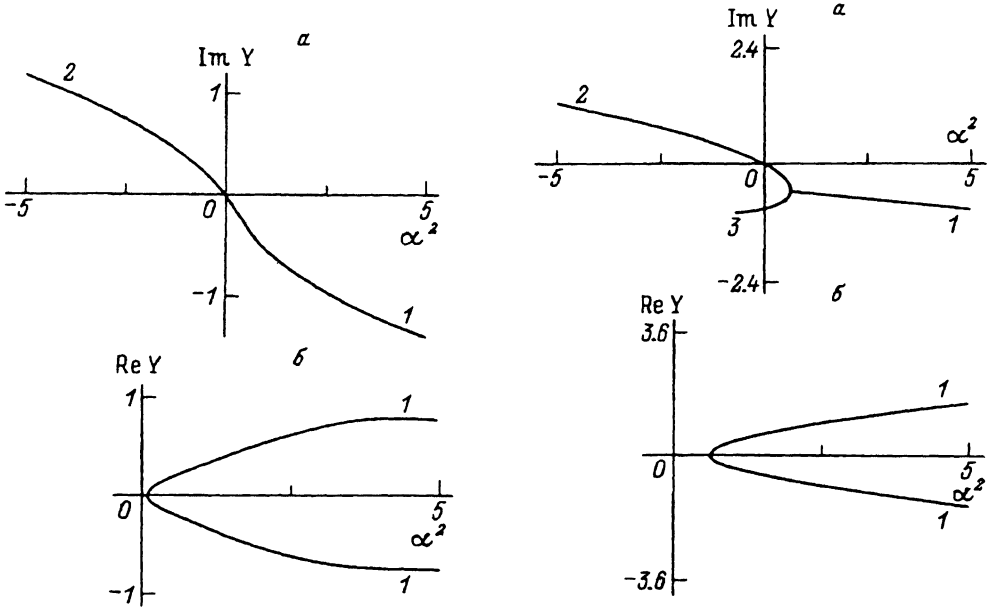


Рис. 1. Зависимости от безразмерного параметра α^2 мнимой (а) и вещественной (б) компонент обезразмеренной комплексной частоты волнового движения в системе двухслойной несжимаемой жидкости с плоской границей раздела.

Нижняя жидкость электропроводная и вязкая заполняет полубесконечное пространство $z < 0$, верхняя вязкая диэлектрическая жидкость заполняет полубесконечное пространство $z > 0$. Отношение плотностей верхней и нижней жидкостей $\eta = 0.1$, отношение их вязкостей $\lambda = 0.1$.

Рис. 2. Зависимости от безразмерного параметра α^2 мнимой (а) и вещественной (б) компонент комплексной частоты: $\eta = 0.1$, $\lambda = 1$.

$\text{Im } y = \text{Im } y(\alpha^2)$ становится более крутой (как можно видеть из рис. 4 и 7).

Затухающее аperiодическое движение, описываемое кривой \mathcal{J} , не существует при малых значениях отношения вязкостей λ (при $\lambda \leq 0.3$) и больших λ ($\lambda > 25$ при $\eta \ll 1$ и $\lambda \geq 10$ при $\eta > 1$). Наиболее отчетливо оно проявляется при $\lambda \sim 1$. Создается впечатление, что это движение реализуется лишь при не очень больших различиях в вязкостях верхней и нижней жидкостей независимо от величины отношения плотностей η (отметим, что кривая \mathcal{J} в точках обрыва на приведенных графиках на самом деле уходит на нижний лист римановой поверхности).

Что касается частот волновых движения $\text{Re } y$, то они уменьшаются с увеличением отношения вязкостей λ . При больших значениях λ ($\lambda \sim 10$ в зависимости от величины отношения плотностей η) изменяется знак кривизны функции $\text{Re } y = \text{Re } y(\alpha^2)$.

По приведенным рисункам можно проследить за влиянием отношения плотностей сред (за влиянием наличия верхней среды с отличной от нуля плотностью) на характеристики реализующихся движений жидкости при фиксированных значениях отношения вязкостей: по рис. 2 и 6 при $\lambda = 1$, по рис. 3, 7 и 8 при $\lambda = 10$. Видно, что исследу-

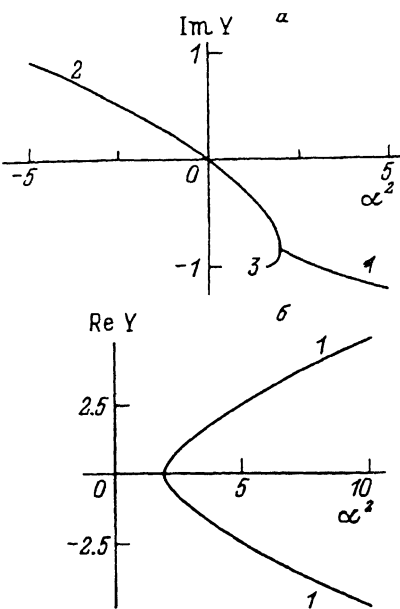


Рис. 3. Зависимости от безразмерного параметра α^2 мнимой (а) и вещественной (б) компонент комплексной частоты: $\eta = 0.1$, $\lambda = 10$.

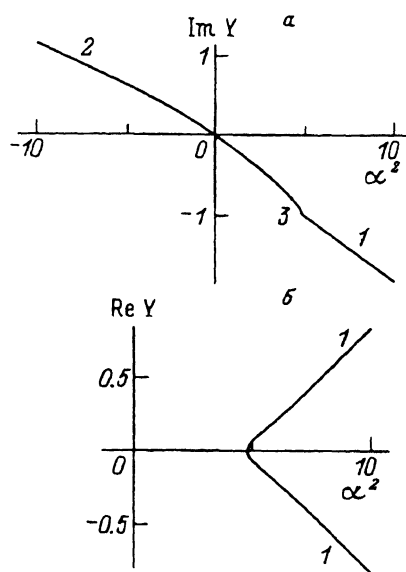


Рис. 4. Зависимости от безразмерного параметра α^2 мнимой (а) и вещественной (б) компонент комплексной частоты: $\eta = 0.1$, $\lambda = 25$.

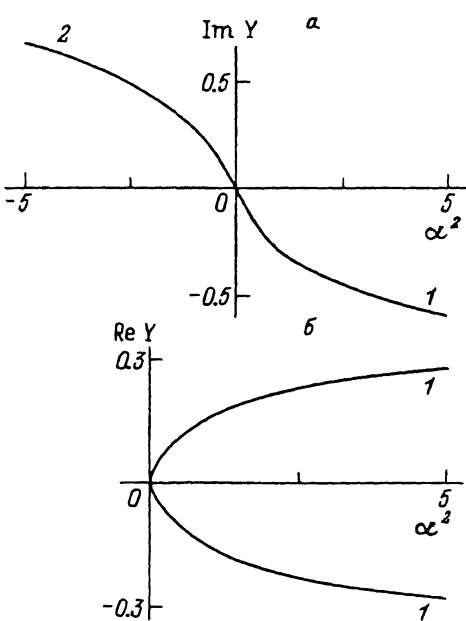


Рис. 5. Зависимости от безразмерного параметра α^2 мнимой (а) и вещественной (б) компонент комплексной частоты: $\eta = 2$, $\lambda = 0.1$.

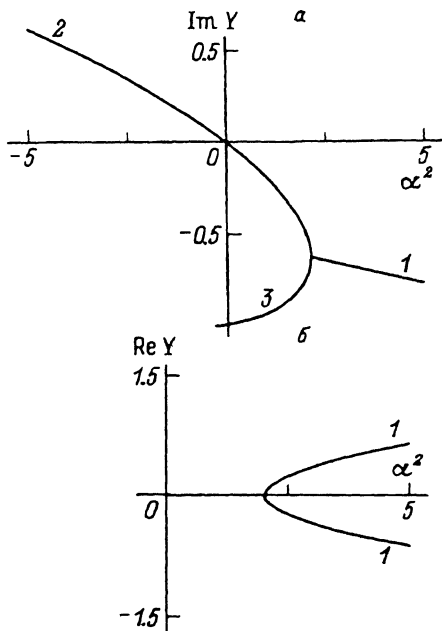


Рис. 6. Зависимости от безразмерного параметра α^2 мнимой (а) и вещественной (б) компонент комплексной частоты: $\eta = 2$, $\lambda = 1$.

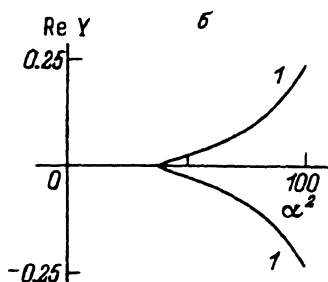
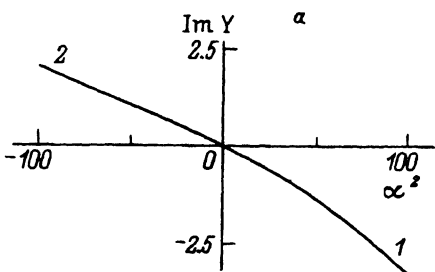


Рис. 7. Зависимости от безразмерного параметра α^2 мнимой (а) и вещественной (б) компонент комплексной частоты: $\eta = 2$, $\lambda = 10$.

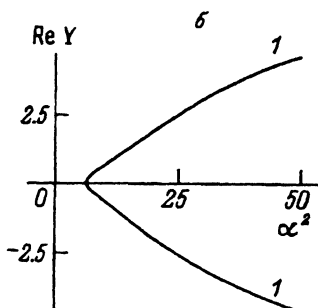
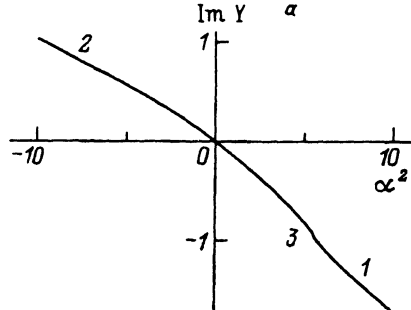


Рис. 8. Зависимости от безразмерного параметра α^2 мнимой (а) и вещественной (б) компонент комплексной частоты: $\eta = 0.3$, $\lambda = 10$.

емая зависимость существенно определяется величиной параметра λ , становясь более отчетливой с увеличением λ . Несложно видеть, что при $\lambda = \text{const}$ с увеличением η уменьшается область существования решения 3, снижаются частоты волновых движений и, что более интересно, быстро уменьшаются инкременты неустойчивости. Так, при $\lambda = 10$ величина инкремента неустойчивости снижается примерно на порядок при увеличении η от 0 до 2.

4. Отдельного рассмотрения заслуживает вопрос о максимальном значении волнового числа в спектре реализующихся волновых движений жидкости.

Обозначим через γ величину абсциссы точки ветвления решений на зависимости $\text{Im } y = \text{Im } y(\alpha^2)$. Тогда соотношение для определения максимального волнового числа записывается как $\alpha^2 = \gamma$ или в размерном виде $\omega_0^2 = \gamma \nu_2^2 k^4$, что дает, согласно (14), уравнение

$$g(1 - \eta) + k^2 \rho_2^{-1} \sigma - k 4\pi \varepsilon^{-1} \rho_2^{-1} \kappa^2 = \gamma \nu_2^2 k^4. \quad (16)$$

Введем новые безразмерные переменные $W = 4\pi \kappa^2 \sigma^{-1} a$, $\nu_*^2 = \nu_2^2 \rho_2 \sigma^{-1}$, $a = (\rho_2 g \sigma^{-1})^{1/2}$, $x = ak$, в которых соотношение (16) примет вид

$$\gamma \nu_*^2 x^3 - x^2 + Wx - (1 - \eta) = 0. \quad (17)$$

При фиксированном значении γ из этого уравнения можно найти максимальное значение волнового числа капиллярных волн, не гасящихся вязкостью, достигаемое в точке ветвления. В силу правила

знаков Лекарта уравнение (17) имеет либо три положительных корня (при $\eta < 1$), либо два (при $\eta > 1$).

Отметим, что речь идет о нахождении волны с максимальным волновым числом, существование которой допускается имеющими место в анализируемой системе диссипативными процессами. В [21] показано, что минимальная длина капиллярной волны, не гасящейся вязкостью в бесконечно глубокой жидкости, граничащей с вакуумом, порядка десятков нанометров. А так как параметр a , входящий в определение безразмерного волнового числа x , имеет смысл капиллярной постоянной, характерный масштаб которой порядка миллиметров, то безразмерное волновое число x будет весьма большим $x \gg 1$ и в уравнении (17) естественно оставить лишь два слагаемых с максимальными степенями x (отметим, что критическое для реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля значение параметра W порядка 1, а величина параметра ν_*^2 для большинства жидкостей определяется соотношением $\nu_*^2 \sim x^1$). Решение оставшегося уравнения (в которое не войдет W , следовательно, наличие на границе раздела электрического заряда на результатах нижеследующего анализа не скажется) будет иметь вид

$$x_{cr} = (\gamma \nu_*^2)^{-1}$$

или

$$k_{cr} = (\gamma \nu_2^2 \rho_2 \sigma^{-1})^{-1}. \quad (18)$$

Качественная зависимость k_{cr} от вязкости ν_2 , плотности ρ_2 и коэффициента поверхностного натяжения σ совпадает с полученной в [21]. Зависимость k_{cr} от отношения плотностей η и отношения вязкостей сред λ проявится через зависимость от них γ — абсциссы точки ветвления решений.

Из приведенных рисунков можно видеть, что увеличение λ как при $\eta = 0.1$ (рис. 1–4), так и при $\eta = 2$ (рис. 5–7) сопровождается существенным ростом абсциссы точки ветвления. Рост абсциссы γ происходит и с увеличением η при неизменном λ (рис. 3, 7, 8). Максимальные значения γ достигаются при больших значениях отношения плотностей η или вязкостей λ верхней и нижней жидкостей. Так, $\gamma \approx 1900$ при $\eta = 0.96$, $\lambda = 990$ для пары касторовое масло–вода, а для комбинации глицерина и ртути с $\eta = 0.093$, $\lambda = 5770$ получим $\gamma \approx 1200$. Физически сказанное означает, что критическая длина капиллярной волны, которая может возникнуть в системе двух несмешивающихся жидкостей, быстро увеличивается с ростом отношений плотностей и вязкостей верхней жидкости. Значения $\gamma \sim 1000$ соответствуют критическим длинам волн порядка миллиметров, а это приводит к существенному ограничению на спектр капиллярных волн, принимающих участие в реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля и, следовательно, к ограничению на спектр размеров капель, эмиттируемых заряженной поверхностью жидкости на финальной стадии неустойчивости [17]. Однако при критических длинах волн порядка миллиметра условие $x \ll 1$, принятое при исследовании уравнения (17), не выполняется и уравнение (17) в таком случае должно решаться численно при конкретных значениях параметров W , η и ν_* . Наличие электрического заряда на границе раздела в такой ситуации уже существенно влияет на величину критической длины волны.

5. Подводя итог вышесказанному, отметим, что величины инкрементов неустойчивостей Тонкса-Френкеля и Рэлея-Тейлора, реализующихся в стратифицированной двухслойной жидкости с заряженной границей раздела, зависят от отношения вязкостей λ и плотностей η верхней и нижней жидкостей, уменьшаясь с увеличением λ и η . Для неустойчивости Рэлея-Тейлора эта зависимость выражена более отчетливо. Критические же условия реализации неустойчивостей Тонкса-Френкеля и Рэлея-Тейлора имеют такой же вид, как и для идеальных жидкостей. Декременты затухания волновых и апериодических движений увеличиваются с увеличением отношения вязкостей и плотностей жидкостей. Минимальная длина капиллярной волны, не гасящейся имеющими место диссипативными процессами, быстро растет как с увеличением отношения вязкостей, так и с увеличением отношения плотностей верхней и нижней жидкостей. Влияние наличия электрического заряда на границе раздела на величину минимальной длины волны становится существенным, когда эта длина волны становится сравнимой с капиллярной постоянной нижней жидкости.

Список литературы

- [1] Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 696 с.
- [2] Ферми Э. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 490-501.
- [3] Sapir M., Havazelet D. // J. Phys. D. 1985. Vol. 18. P. 41-46.
- [4] Lyell M.J., Roh M. // AIAA J. 1991. Vol. 29. N 11. P. 1894-1900.
- [5] Tonks L. // Phys. Rev. 1935. Vol. 48. P. 562-568.
- [6] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348-350.
- [7] Зайцев М.В., Шлиомис М.И. // ДАН СССР. 1969. Т. 188. № 6. С. 1261-1263.
- [8] Ермаков В.И. // Вестн. Харьковского ун-та. № 221. Прикладная математика и механика. 1981. Вып. 46. С. 45-51.
- [9] Алиев И.Н., Савичев В.В. // Тез. Междунар математической конф. "Ляпуновские чтения". Харьков, 1992. С. 7-8.
- [10] Mohammed A.A., Elshehawey E.F. // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. N 7. P. 1724-1730.
- [11] Melcher J.R. // Phys. Fluids. 1961. Vol. 4. N 11. P. 1348-1354.
- [12] Ермаков В.И. // Магнитная гидродинамика. 1976. № 4. С. 85-88.
- [13] Taylor G.I., MoEwan A.D. // J. Fluid. Mech. 1965. Vol. 22. N 1. P. 1-15.
- [14] Брискман В.А., Шайдунов В.А. // Гидродинамика. № 2. Уч. зап. Пермского ун-та. № 216. 1970. С. 229-240.
- [15] Нестеров С.В., Северж-Зенькович С.Я. // ДАН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 318-320.
- [16] Алиев И.Н., Филиппов А.В. // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 94-98.
- [17] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 12-21.
- [18] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [19] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [20] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [21] Антонюк П.Н. // Дан СССР. 1986. Т. 286. № 6. С. 1324-1328.