

01;05

**ДИССИПАТИВНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
РАЗРУШЕНИЯ В ПРОВОДЯЩИХ МАТЕРИАЛАХ
С ТРАНСПОРТНЫМ ТОКОМ
I. КРИТЕРИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ,
КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ**

© И.Л.Максимов, Ю.В.Свирина

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
603091 Нижний Новгород, Россия
(Поступило в Редакцию 4 апреля 1995 г.)

Введение

Влияние транспортного тока на условия и динамику разрушения макроскопических твердых тел является сравнительно малоизученным. Между тем это влияние может осуществляться в виде двух факторов: а) через пондеромоторные напряжения, возникающие в образце с током, помещенном в магнитное поле (и воздействующие на механическую подсистему), и б) посредством джоулевой диссипации, возникающей при протекании тока в материале. Первое с очевидностью способно существенно изменить порог разрушения макротел. Однако в отсутствие магнитного поля наиболее эффективным каналом влияния становится джоулева диссипация. Последняя при условии достаточно высокой плотности тока может заметно изменить среднюю температуру образца, что приводит в конечном итоге к изменению соответствующих механических параметров материала (порог пластичности, модуль упругости и др.). Эффекты разогрева наиболее ярко проявляются при наличии в образце макроскопических дефектов (трещин, макрополостей и др.), способствующих локальному возрастанию плотности тока (и соответственно диссипации энергии) вблизи краев дефекта.

Влияние локальной диссипации, обусловленной только лишь пластической деформацией в привершинной зоне, на порог возникновения и динамику разрушения исследовалось в [1,2]. Было установлено, что пластическая диссипация может привести к качественно новым эффектам (в частности, возникновению термомеханической неустойчивости разрушения [1-3]).

В настоящей работе, представленной в двух частях, проведено исследование совместного воздействия пластической и джоулевой диссипации на устойчивость разрушения проводящих материалов с током. Показано, что джоулева диссипация обуславливает появление неустойчивости нового типа при разрушении макротел. А именно обнаружено существование диссипативной, а также чисто тепловой неустойчивостей разрушения, определены размеры трещин, характеризующие области неустойчивости. Найдены характерные значения транспортного тока, определяющие тип возникающей неустойчивости. В результате детального анализа полученной системы уравнений построены диаграммы зависимости инкремента неустойчивости λ от размера трещины a_0 . Обнаружено существование двух динамических режимов роста трещины: абсолютного (трещина экспоненциально быстро нарастает с начального размера) и осцилляционного (трещина растет скачкообразно). Показано, что наличие тока в пленке, содержащей трещину, приводит к тепловому разупрочнению материала, что проявляется в расширении областей неустойчивости с ростом тока. Определено значение тока, при котором возникает глобальная тепловая неустойчивость.

Предварительные результаты работы были представлены на Международной конференции по основам разрушения ICFF-10 (июнь 1993 г.), на I Российском симпозиуме по механике твердого тела (июнь 1994 г.) и частично опубликованы в трудах конференции [4]. В отличие от предыдущих работ здесь проведено подробное исследование влияния диссипативных процессов различной природы на динамику неизотермического разрушения. Приведен подробный расчет мощности джоулевой диссипации привершинной области трещины (часть I). Описана новая, диссипативная неустойчивость разрушения, характеризующаяся "мягким" режимом возбуждения в системе (т.е. с малым инкрементом нарастания λ малых возмущений размера трещины δa и температуры δT : $\delta a, \delta T \sim \exp(\lambda(a_0)t)$), а также обсуждены условия ее наблюдения (часть II). Предсказан эффект смены динамических режимов роста трещины в зависимости от плотности транспортного тока.

Изложение материала построено по следующему принципу: в разделе 1 первой части дано описание модели, а также проведено качественное исследование процесса неизотермического разрушения, в разделе 2 приведен точный расчет мощности джоулевой диссипации в привершинной области и в разделе 3 проведено обсуждение полученных результатов. Во второй части данного цикла будут сформулированы эволюционные уравнения, описывающие динамику неизотермического роста трещины, и проведен их линейный анализ. Оценены значения параметров, при которых возможно наблюдение предсказанных эффектов.

1. Качественная картина неизотермического разрушения

Рассмотрим тонкую пластину, содержащую трещину размера $2a$, находящуюся в однородном поле растягивающего напряжения p . В пластине течет ток с плотностью j_0 . Как известно, в привершинной области трещины существует зона пластической деформации размера d (рис. 1), поглощающая часть упругой энергии, выделяемой при раскрытии трещины, тем самым стабилизируя ее рост [5]. Между тем

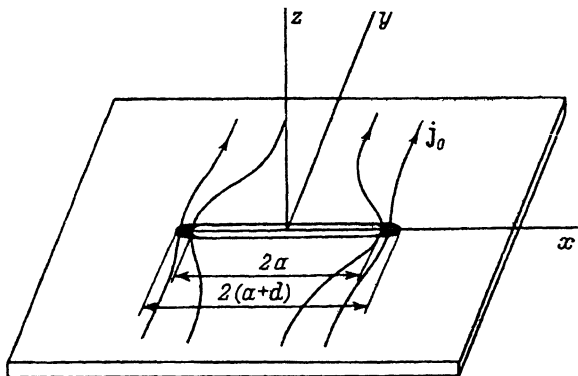


Рис. 1. Геометрия задачи.

пластическая деформация материала, выражающаяся в необратимом перераспределении дислокаций в пластической зоне, сопровождается выделением тепла, которое приводит к разогреву привершинной зоны. Кроме того, при прохождении тока в пластине, содержащей трещину, вблизи ее краев возникает локальное возрастание плотности тока (и соответственно диссипации энергии), которое так же приводит к повышенному локальному разогреву привершинной зоны. Поскольку порог пластичности σ_s , определяющий величину энергетического барьера для дислокаций, сильно зависит от температуры [6] (как правило, является падающей функцией температуры), то дополнительный разогрев привершинной зоны за счет джоулева тепловыделения способствует увеличению скорости пластической деформации, а соответственно и диссипируемой энергии. Ввиду того что тепловой отклик джоулева тепловыделения, как правило, положителен $dQ_j/dT > 0$, возрастание температуры в привершинной зоне вследствие пластической деформации способствует увеличению мощности джоулевой диссипации. Таким образом, взаимное влияние этих двух диссипативных механизмов может привести к неуправляемому росту температуры в привершинной зоне, что по существу свидетельствует о возможности возникновения новой, диссипативной, неустойчивости разрушения. Анализ условий возникновения этой неустойчивости посвящена настоящая работа.

а) Термомеханическая неустойчивость. При протекании тока в образце, подверженном механическому нагружению, диссипативные явления сопутствуют процессам, происходящим в механической подсистеме. Наиболее существенным образом влияние тока на устойчивость механически нагруженного материала скажется, очевидно, вблизи порога разрушения. Поэтому вначале опишем критерий разрушения материала в отсутствие тока. Выделяемая в процессе разрушения упругая энергия $\delta U = \tilde{\lambda} p^2 e b a h / E$ идет на образование новых берегов трещины $2\gamma \delta a$ (γ — поверхностная энергия, h — поперечный размер пленки) и на работу пластической деформации $G_0 \delta a b$, которая затем переходит в тепло. В случае, когда скорость высвобождения энергии упругой деформации превосходит природу поверхностной энергии и пластической работы, трещина станет распространяться. С

учетом вышесказанного условие устойчивости запишется в виде

$$\frac{\tilde{\lambda} p^2}{E} a + F > 2\gamma + G_0 a, \quad (1)$$

где F — внешние силы, стимулирующие рост трещины.

Из (1) видно, что устойчивыми будут трещины с размерами $a < a_0$, где

$$a_0 = \frac{F - 2\gamma(T)}{Q(T)}. \quad (2)$$

Здесь

$$Q = G_0 - \frac{\tilde{\lambda} p^2}{E}.$$

Для определения порога возникновения термомеханической неустойчивости исследуем устойчивость условия (1) относительно малых возмущений температуры δT . Учитывая температурную зависимость параметров материала и полагая $dQ/dT > 0$ и $d\gamma/dT < 0$, условие (1) представим в виде

$$-2 \left(\frac{d\gamma}{dT} \right)_0 < \left(\frac{dQ}{dT} \right)_0 a_0 - Q_0 \left(\frac{da}{dT} \right)_0. \quad (3)$$

Индексом 0 отмечены равновесные значения параметров (при $T = T_0$, $a = a_0$). Уравнение теплового баланса в квазиadiaбатическом случае имеет вид

$$\varphi(p) a^2 C_v \dot{T} = G_0 a \dot{a}, \quad (4)$$

где $\varphi(p) a^2$ — площадь пластической зоны, C_v — теплоемкость материала.

Здесь и в дальнейшем мы полагаем, что рост трещины происходит автомодельным образом, т.е. так, что размер пластической зоны d пропорционален размеру трещины a ,

$$d = a \xi(p) \quad (5)$$

(явный вид функции $\xi(p)$ для модели Дагдейла-Панасюка-Леонова [7,8] выписав в Приложении).

Из (4) нетрудно получить

$$\left(\frac{da}{dT} \right)_0 = \frac{\varphi(p) a_0 C_v}{G_0}. \quad (6)$$

Окочательно находим, что трещины с размерами $a_0 < \tilde{a}$, где

$$\tilde{a} = \frac{-2 \left(\frac{d\gamma}{dT} \right)_0}{\left(\frac{dQ}{dT} \right)_0 + \frac{C_v \varphi(p) Q_0}{G_0}} \quad (7)$$

будут неустойчивыми по отношению к связанным термомеханическим возмущениям.

б) Тепловая неустойчивость. Теперь обратимся к анализу процессов, происходящих в тепловой подсистеме. Протекание тока в пленке, как известно, сопровождается джоулевым тепловыделением $\rho j_0^2 S h = \dot{Q}_v$ (S — площадь пластины, ρ — удельное сопротивление материала). Однако в упругой зоне это тепловыделение приводит лишь к общему повышению средней температуры образца, что фактически эквивалентно переопределению T_0 . При условии

$$\frac{\rho j_0^2 h}{W_S T_0} \ll 1 \quad (8)$$

этот разогрев является несущественным и не влияет на динамику роста трещины (здесь W_S — эффективная константа теплоотвода, характеризующая тепловой поток с поверхности пластины). В пластической же зоне помимо джоулева тепловыделения $\Phi(p)\rho j_0^2 a^2 = \dot{Q}_J$ (расчет функции $\Phi(p)$ см. в разделе 2) имеет место еще один механизм диссипации — пластическая деформация материала. Поэтому наибольший интерес представляет исследование совместного влияния этих механизмов на динамику тепловой и механической подсистем, что, как будет показано ниже, приводит к качественно новым эффектам.

Если учесть процессы теплоотвода из пластической зоны в зону упругой деформации $W_1 a(T - T_0)$ и тепловой поток в продольном направлении (вдоль оси z) $W_2 a^2(T - T_0)$, то уравнение теплового баланса запишется в виде

$$\varphi(p)C_v a^2 \dot{T} = G_0 \dot{a} a + \Phi(p)\rho j_0^2 a^2 - W_1 a(T - T_0) - W_2 a^2(T - T_0). \quad (9)$$

Здесь T описывает среднюю температуру пластической зоны. В квазистационарном случае ($\dot{T}, \dot{a} \rightarrow 0$) получаем

$$\Phi(p)\rho j_0^2 a^2 = (W_2 a^2 + W_1 a)(T - T_0), \quad (10)$$

что позволяет получить уравнение для определения равновесной температуры

$$\bar{T} = T_0 + \frac{\Phi(p)\rho(\bar{T})j_0^2 a_0}{W_2 a_0 + W_1}. \quad (11)$$

Уравнение (11), вообще говоря, имеет семейство решений для точек равновесия \bar{T} для материалов со сложной температурной зависимостью сопротивления $\rho(T)$ например, сверхпроводники, системы с фазовым переходом металл-полупроводник (рис. 2). Однако здесь мы уделим основное внимание ситуации, когда имеется единственное решение уравнения (11), что является типичным для нормальных металлов в области низких температур или полупроводников вдали от температуры перехода в металлическую фазу.

При исследовании устойчивости стационарного состояния, определяемого уравнением теплового баланса, можно использовать два подхода. В первом исследуется динамика тепловых возмущений, развивающихся вблизи вершины трещины фиксированных размеров (тепловая

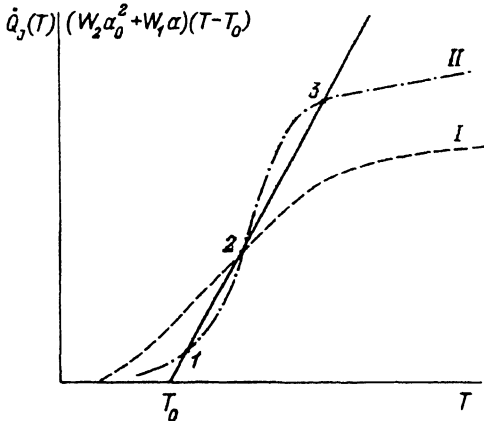


Рис. 2. Точки равновесия (1-3).

I — ситуация, когда имеется одно положение равновесия; II — реализуется три положения равновесия.

неустойчивость). Этот подход справедлив в случае слабой температурной зависимости равновесного размера трещины ($da/dT \simeq 0$) и может оказаться актуальным, например, при исследовании диссипативных эффектов в сверхпроводящих пленках и пластинах, содержащих трещиновидные дефекты [9]. В другом подходе исследуется устойчивость положения равновесия по отношению к малым возмущениям тепловой и механической природы. В этом случае ($da_0/dT \neq 0$) и тепловые и механические возмущения, развиваясь связанным образом, способны обеспечить нетривиальную динамику разрушения.

Выясним сначала условие возникновения тепловой неустойчивости вблизи трещин фиксированных размеров. Для этого исследуем отклик (10) по отношению к малым возмущениям температуры δT . Варьируя (10) и пренебрегая температурной зависимостью $a(T)$, получаем

$$\Phi(p)j_0^2 \frac{d\rho}{dT} a \delta T = (W_1 + W_2 a) \delta T. \quad (12)$$

Система будет устойчивой, если отклик тепловыделения $d\dot{Q}/dT$ не превышает теплоотвод из пластической зоны. Это условие реализуется для трещин размера $a_0 < a'$, где

$$a' = \frac{W_1}{\Phi j_0^2 \frac{d\rho}{dT} - W_2}. \quad (13)$$

Полученный результат означает, что вблизи трещин размера $a_0 > a'$ температура экспоненциально быстро нарастает. Распределение температуры вблизи трещин размера $a_0 < a'$ будет стационарным.

При исследовании связанной динамики термомеханических возмущений необходимо решать совместно уравнения (2) и (11). Варьируя (10), с учетом температурной зависимости $a_0(T)$ приходим к следующему уравнению:

$$G_1 a_0^2 + G_2 a_0 + G_3 = 0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= QW_2 \left(W_2 - \Phi j_0^2 \frac{d\rho}{dT} \right), \\ G_2 &= W_1 \left(\Phi j_0^2 \left(\rho \frac{dQ}{dT} - Q \frac{d\rho}{dT} \right) + 2QW_2 \right), \\ G_3 &= W_1 \left(2 \frac{d\gamma}{dT} \Phi j_0^2 \rho_0 + W_1 Q \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Решая (14), находим

$$a_{\pm}^* = \frac{G_2 \pm \sqrt{G_2^2 - 4G_1G_3}}{2G_1}. \quad (16)$$

Из (1) и (14) следует, что неустойчивость возникает при условии $G_1 a_0^2 + G_2 a_0 + G_3 < 0$. Поэтому a_{\pm}^* определяет порог возникновения диссипативной неустойчивости. Развитие такого рода неустойчивости проявляется в совместном росте температуры и размера трещины.

2. Мощность джоулевой диссипации в привершинной области

Величина мощности джоулевой диссипации на единицу толщины вычисляется согласно формуле

$$\dot{Q}_J = \int \sigma |\mathbf{E}|^2 dr, \quad (17)$$

где интегрирование производится по всей пластической зоне, $|y| < v$, $0 < x < d$. Здесь $v = \delta(p)a$ — величина раскрытия трещины (см. Приложение).

Геометрия данной задачи позволяет использовать для расчета поля E методы теории функции комплексного переменного. В случае плоского безвихревого поля, описываемого уравнениями

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad (18)$$

потенциал φ и напряженность поля \mathbf{E} можно выразить через одну функцию комплексного переменного $f(\zeta)$ [10]

$$f(\zeta) = U(x, y) + i\varphi(x, y), \quad (19)$$

где $\zeta = x + iy$, $E_x + iE_y = -if'_x(\zeta)$, $\varphi = \text{Im } f(\zeta)$.

Учитывая, что $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ и при $(T - T_0)/T_0 \ll 1$, градиентом проводимости можно пренебречь, получим аналогичные выражения для тока. Используя известное решение гидродинамической задачи об обтекании пластины потоком несжимаемой жидкости [11], получаем выражение для поля E

$$E = E_x^\infty + \frac{iE_y^\infty \zeta}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}. \quad (20)$$

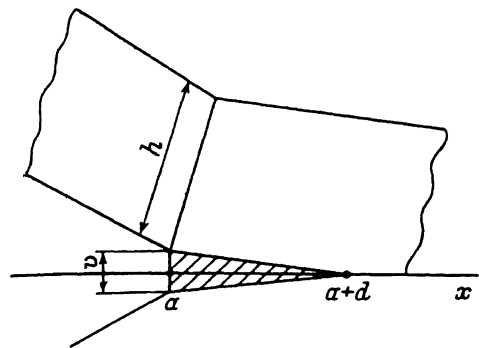


Рис. 3. Зона пластической деформации.

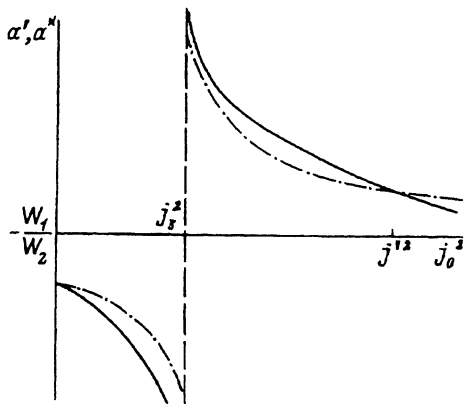


Рис. 4. Зависимость характерных размеров трещин a'_+ и a' от плотности транспортного тока j_0^2 .

В простейшей ситуации, когда трещина ориентирована перпендикулярно линиям тока, на бесконечности имеем $E_y^\infty = j_0/\sigma$, а $E_x^\infty = 0$, что позволяет непосредственно вычислить \dot{Q}_J .

Величина мощности джоулевой диссипации вычисляется согласно формуле (17). В декартовой системе координат

$$|E| = \frac{j_0}{\sigma} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}}.$$

Поскольку пластическая зона имеет клиновидную форму (рис. 3), то удобно перейти к переменным r и φ , сделав соответствующую замену $x = l - r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ где $l = a + d$, $0 \leq r \leq d$. Угол $\varphi_{\max} \sim v/d$ мал, поэтому $x = l - r + r\varphi^2/2$, $y = r\varphi$.

Учитывая малость φ , интеграл

$$I = \frac{\sigma^2}{j_0^2} \int |E|^2 d^2r$$

примет вид

$$I = 2 \int_0^{\varphi_m} \int_0^d \frac{(l-r)^2 r}{\sqrt{(\gamma(r) + \alpha(r)\varphi^2)^2 + \beta(r)\varphi^2}} dr d\varphi,$$

где $\gamma(r) = (d-r)(2a+d-r)$, $\alpha(r) = lr - 2r^2$, $\beta(r) = 2r^2l^2 + r^2(l-r)(2l-r)$.

Проинтегрировав полученное выражение по переменной φ , получаем

$$I = 2 \int_0^d \frac{(l-r)^2 r \ln \left| \frac{\sqrt{f(r)\varphi_m + \sqrt{f(r)\varphi_m^2 + \gamma(r)}}}{\gamma(r)} \right|}{\sqrt{f(r)}} dr,$$

где $f(r) = \gamma(r)\alpha(r) + \beta(r)$.

Учтем, что $d \ll a$, а $l = r + d \sim a$, тогда функция $f(r)$ и интеграл I преобразуются к виду $f(r) = 2rl^2(d+r)$,

$$I = 2 \int_0^d \frac{(l-r)^2 r \ln \left| \frac{\sqrt{2r(d+r)} \varphi_m}{(d-r)} \right|}{\sqrt{2rl^2(d+r)}} dr.$$

Область интегрирования можно разбить на две части: $0 < r < d-v$ и $d-v < r < d$. Тогда в первой области при $d-r \gg v$ получаем

$$f(r)\varphi_m^2 \ll (d-r)^2 4a^2, \quad I \approx \frac{vl^2}{d-a} \left(d \ln \frac{d}{ve} + v \right).$$

Во второй при $d-v \ll v$

$$f(r) \approx 4l^2 d^2, \quad I \approx lv \ln 2e.$$

Таким образом, окончательно выражение для мощности джоулевой диссипации примет вид

$$\dot{Q}_J = \frac{j_0^2}{\sigma} (a+d)v \ln \frac{2d}{v}. \quad (21)$$

Отметим, что полученные выше результаты без потери общности могут быть применимы для описания диссипативных эффектов вблизи произвольно ориентированных (по отношению к току) трещин. Выбор ориентации, рассмотренной нами, обусловлен тем, что в данной геометрии диссипативные эффекты проявляются наиболее ярко. При произвольной ориентации трещины в формулу (21) следует ввести множитель $\sin^2 \alpha$ (α — угол между внешним током и линией трещины), отражающий диссипативный вклад поперечной (по отношению к ориентации трещины) составляющей тока. Заметим также, что выражение (21), справедливое для нормально проводящих материалов, описывает также мощность диссипации в сверхпроводниках вблизи температуры перехода. В этом случае σ совпадает с проводимостью, обусловленной наличием нормальных носителей тока при $T \leq T_c$. Расчет диссипации в случае токов вихревой природы, обусловленных движением абрикосовских вихрей, представляет собой отдельную задачу и здесь не рассматривается.

3. Обсуждение

Полученные в результате качественного анализа характерные размеры a_{\pm}^* и a' , определяющие пороги возникновения тепловой и диссипативной неустойчивости разрушения, существенно зависят от величины плотности транспортного тока j_0 . Анализируя зависимость $a'(j_0)$ и $a^*(j_0)$, введем характерные значения плотности тока

$$j_1^2 = \frac{2W_2 Q}{Q \Phi \frac{d\rho}{dT} - \Phi \rho \frac{dQ}{dT}}, \quad (22)$$

$$j_2^2 = \frac{Q_0 W_1}{-2 \frac{d\gamma}{dT} \Phi(p) \rho_0}, \quad (23)$$

$$j_3^2 = \frac{W_2}{\frac{d\rho}{dT} \Phi}, \quad (24)$$

которые могут быть определены из условия $G_2 = 0$, $G_3 = 0$, $G_1 = 0$. Из (22) и (23) видно, что характерный ток j_1 существует только в том случае, если температурный отклик тепловыделения превышает отклик работы пластической деформации

$$Q \frac{d\rho}{dT} - \rho \frac{dQ}{dT} > 0, \quad (25)$$

а j_2 — при условии $d\gamma/dT < 0$ [3].

Обсудим случай, когда существуют три характерных тока. Очевидно, что в зависимости от соотношения между параметрами материала возможно существование трех различных иерархий характерных значений плотности тока. Рассмотрим, например, случай $j_3 < j_2 < j_1$. Из анализа (13) и (16) видно, что характерные размеры a_+^* и a' будут положительно определены при $j_0 > j_3$ (рис. 4). Отрицательность значений a_+^* и a' при $j_0 < j_3$ означает, что при низкой плотности тока джоулева диссипация не способна привести к возникновению тепловой или диссипативной неустойчивости. Величина плотности тока j' , при которой происходит слияние точек a_+^* и a' , определяется из условия $a_+^* = a'$

$$j' = \frac{\left(\frac{dQ}{dT}\right) W_1 + \left(-2 \frac{d\gamma}{dT}\right) W_2}{\left(-2 \frac{d\gamma}{dT}\right) \Phi \frac{d\rho}{dT}}. \quad (26)$$

Как показывает анализ, характерные размеры a_+^* и a' уменьшаются по мере роста тока, что в соответствии с результатами качественного анализа приводит к расширению области неустойчивости разрушения.

Полученные в работе результаты могли бы быть использованы при анализе границ устойчивых режимов работы в токонесущих системах и устройствах, в которых диссипативные явления играют существенную роль. Например, в сверхпроводящих магнитах, сделанных на основе тонких пластин или пленок из квазихрупкого высокотемпературного сверхпроводящего материала, последние могут вызвать эффекты деградации максимально возможного критического тока в системе, а также эффекты тренировки [12].

Анализ микроструктуры сверхпроводящих пластин, изготовленных на основе высокотемпературных сверхпроводящих (иттриевых или висмутовых) материалов [13], обнаруживает существование значительного числа микротрещин. В соответствии с нашими результатами эти дефекты должны привести к существенному ограничению токонесущей способности пластин и проводов, изготовленных на основе данных материалов. Подчеркнем, что наибольший вклад при этом будут давать трещины, ориентированные перпендикулярно линиям тока. Отметим, что предложенная нами модель будет применима для описания ансамбля трещиновидных дефектов в случае достаточно низкой концентрации последних $L \gg a$, где L — среднее расстояние между дефектами.

Точные критерии возникновения неустойчивости разрушения для различного класса материалов, а также анализ динамики разрушения нормальных проводников и сверхпроводников с транспортным током будут представлены во второй части работы.

Авторы признательны В.Я.Демиховскому, В.М.Маркочеву, В.Н.Перевезенцеву и А.М.Сатанину за ценные обсуждения.

Работа поддержана Госкомвузом Российской Федерации (грант № 242-539), Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 93-02-16876), а также Международным научным Фондом (грант № R8J000).

Приложение

Для модели Дагдейла-Леонова-Панасюка [7,8] введенные функции напряжения имеют вид

$$\xi(p) = \sec(\pi p/2\sigma_s) - 1,$$

$$\delta(p) = -(8\sigma_s/\pi E) \ln \cos(\pi p/2\sigma_s),$$

$$\varphi(p) = \left[2\sigma_s/\pi E \right] \left[(\pi p/2\sigma_s) \operatorname{tg}(\pi p/2\sigma_s) + 2 \ln \cos(\pi p/2\sigma_s) \right],$$

$$\psi(p) \simeq 2\delta(p) + 2\xi(p),$$

$$G_0(p) = \left[8\sigma_s^2/\pi E \right] \left[(\pi p/2\sigma_s) \operatorname{tg}(\pi p/2\sigma_s) + \ln \cos(\pi p/2\sigma_s) \right].$$

Список литературы

- [1] Максимов И.Л. // ДАН СССР. 1990. Т. 313. С. 1395-1399.
- [2] Maksimov I.L. // Appl. Phys. Lett. 1989. Vol. 55. N 6. P. 42-44.
- [3] Maksimov I.L. et al. // Mater. Sci. and Eng. 1994. Vol. A176. P. 309-315.
- [4] Maksimov I.L., Svirima J.V. // Mater. Sci. and Eng. 1994. Vol. A176. P. 321-326. Proc. of the Intern. Conf. on Fundamentals of Fracture / Ed. H. Kimura. Tokyo, 1994. P. 277-283.
- [5] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 520 с.
- [6] Судзюки Т., Иши Г. Физика прочности и пластичности. М.: Металлургия, 1972. 280 с.
- [7] Dugdale D.S. // J. Mech. Phys. Sol. 1960. Vol. 8. N 3. P. 100-110.
- [8] Леонов М.Я., Панасюк В.В. // Прикладная механика. 1959. Т. 5. С. 391-401.
- [9] Kim S., Duzbury P. // J. Appl. Phys. 1991. Vol. 70. P. 3164-3170.
- [10] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. // Теория функций комплексных переменных. М.: Наука, 1965. 320 с.
- [11] Кочин Н.Е., Кибель И.А. // Теоретическая гидродинамика. М.: Наука, 1963. 360 с.
- [12] Bobrov E.S., Williams J.E.C., Iwasa Y. // Cryogenics. 1985. Vol. 25. P. 307-316.
- [13] Polyanski A.A., Pashitski A.E., Zhang W. et al. // Abstracts of the Applied Superconductivity Conf. Boston, 1994. P. 153-154.