

01;09

## К ВОПРОСУ О СВЯЗИ ДВУХ РЕЗОНАТОРОВ

© Н.И.Айзацкий

Харьковский физико-технический институт АН Украины,  
310108 Харьков, Украина  
(Поступило в Редакцию 10 мая 1995 г.)

Изложены результаты исследований по разработке новой аналитической модели для исследования связи электродинамических систем через малые отверстия. Рассмотрена ключевая задача о взаимодействии двух резонаторов через отверстие в разделяющем экране конечной толщины без предположения о малости каких-либо параметров. Впервые на основе строгого электродинамического подхода рассчитано значение коэффициентов связи двух цилиндрических резонаторов в пределе малых отверстий и бесконечно тонкой стенки. Приведены результаты численного расчета зависимостей электродинамических характеристик от параметров, которые невозможно было исследовать в ранее разработанных моделях.

## Введение

Вопрос о расчете связи электродинамических систем через малые отверстия интересует исследователей уже более сорока лет. Подход к рассмотрению данной проблемы с использованием понятий эквивалентных электрического и магнитного дипольных моментов, предложенный в работах [1,2], оказался плодотворным и на его основе было проведено исследование различных электродинамических характеристик взаимодействующих объектов (см. [3-10] и цитируемую там литературу). Ключевым моментом в данном подходе является использование квазистатического приближения при вычислении полей в области отверстий связи, что автоматически накладывает условие малости размеров отверстия по сравнению с длиной волны. Кроме того, отверстия должны быть расположены вдали от границ рассматриваемых электродинамических систем. Несмотря на эти ограничения, разработанные методы позволили не только провести расчет ряда существенных характеристик, но и сформировать (или обосновать) качественно новые подходы к рассмотрению различных СВЧ устройств. Особенно существенное влияние оказал данный подход на развитие теории систем, основанных на использовании резонансных свойств электродинамических систем (диафрагмированные волноводы, цепочки связанных резонаторов и т.д.).

Однако к настоящему времени не разработаны общие методы расчета коэффициентов связи систем с малыми отверстиями, из которых "квазистатические" результаты получались бы предельным переходом  $\omega a/c \rightarrow 0$ . Развитие таких методов позволило бы не только оценить область применимости уже полученных результатов, но и расширить круг задач о СВЧ взаимодействии, поддающихся строгому описанию (корректный учет толщины разделяющих экранов, близость стенок и т.п.). Необходимо отметить, что предпринимались некоторые попытки расширить область применимости результатов, полученных на основе квазистатического приближения [4,10]. Однако корректность предложенных методик не может быть обоснована в рамках рассматриваемых моделей.

Разработка новых аналитических методов исследования связи электродинамических систем через малые отверстия актуальна также в связи с тем, что в данной области затруднено использование широко развитых к настоящему времени численных методов решения электродинамических задач. Это связано с тем, что при малых отверстиях связи требуется обеспечивать чрезвычайно высокую точность математических моделей, поскольку относительная точность модели должна быть меньше коэффициента связи.

В данной работе изложены результаты исследований по разработке новой аналитической модели для исследования связи электродинамических систем через малые отверстия. Рассмотрена ключевая задача о взаимодействии двух резонаторов через отверстие в разделяющем экране конечной толщины без предположения о малости каких-либо параметров.

### Постановка задачи

Рассмотрим два идеально проводящих соосных цилиндрических резонатора, связанных через цилиндрическое отверстие радиуса  $a$  в разделяющем плоском экране толщиной  $t$  (рис. 1). Радиусы и длины первого и второго резонаторов обозначим соответственно через  $b_1, d_1$  и  $b_2, d_2$ . Для построения математической модели рассматриваемой электродинамической системы используем сравнительно недавно начавший разрабатываться метод частично пересекающихся областей (см., например, [11,12]). В качестве первой и второй областей выберем объемы цилиндрических резонаторов, в качестве третьей — цилиндр, соосный с отверстием связи и имеющий одинаковый с ним радиус  $b_3 = a$ . Этот цилиндр выступает на расстояние  $d_{1*}$  в область первого резонатора и  $d_{2*}$  в область второго, при этом его длина равна  $l_* = d_{1*} + d_{2*} + t$ .

В каждой из трех областей электромагнитные поля разложим в ряды Фурье по электродинамическим базисам, порождаемым соответствующими цилиндрическими областями,

$$\mathbf{E}^{(i)} = \sum_{n,s} e_{n,s}^{(i)} \mathbf{E}_{n,s}^{(i)} + \sum_{n,s} e'_{n,s}{}^{(i)} \mathbf{E}'_{n,s}{}^{(i)}, \quad (1)$$

$$\mathbf{H}^{(i)} = \sum_{n,s} h_{n,s}^{(i)} \mathbf{H}_{n,s}^{(i)} + \sum_{n,s} h'_{n,s}{}^{(i)} \mathbf{H}'_{n,s}{}^{(i)}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{E}_{n,s}^{(i)}, \mathbf{H}_{n,s}^{(i)}$  — вихревые, а  $\mathbf{E}'_{n,s}{}^{(i)}, \mathbf{H}'_{n,s}{}^{(i)}$  — потенциальные подсистемы.

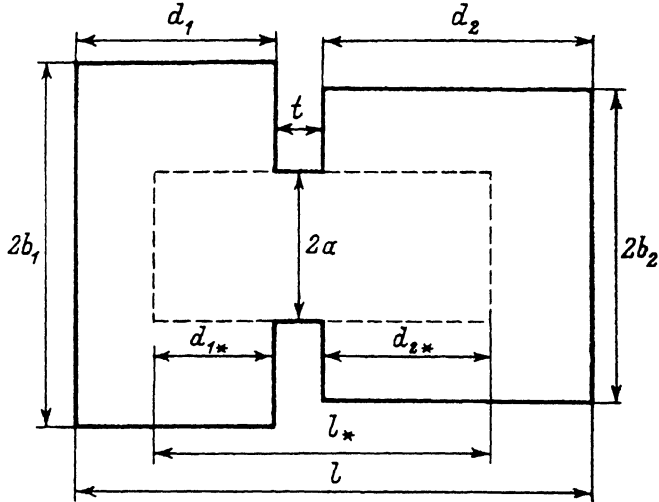


Рис. 1.

Для аксиально-симметричных колебаний  $e_{n,s}^{(i)} = h_{n,s}^{(i)} = 0$ , а система вихревых базисных функций имеет вид

$$E_{n,s,z}^{(i)} = \frac{\lambda_s^2 c}{b_i^2 \omega_{n,s}^{(i)} N_{n,s}^{(i)}} \cos(k_n^{(i)} \xi_i) J_0(\lambda_s r / b_i), \quad (2a)$$

$$E_{n,s,r}^{(i)} = \frac{\lambda_s k_n^{(i)} c}{b_i \omega_{n,s}^{(i)} N_{n,s}^{(i)}} \sin(k_n^{(i)} \xi_i) J_1(\lambda_s r / b_i), \quad (2б)$$

$$H_{n,s,\phi}^{(i)} = -i \frac{\lambda_s}{b_i N_{n,s}^{(i)}} \cos(k_n^{(i)} \xi_i) J_1(\lambda_s r / b_i), \quad (2в)$$

где  $i = 1, 2, 3$ ;  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ;  $J_0(\lambda_s) = 0$ ;  $\omega_{n,s}^{(i)} = c \sqrt{k_n^{(i)2} + \lambda_s^2 / b_i^2}$ ;  $k_n^{(i)} = \pi n / d_i$ ;  $N_{n,s}^{(i)} = \sqrt{\pi \theta_n d_i \lambda_s^2 J_1^2(\lambda_s) / 2}$ ;

$$\theta_n = \begin{cases} 2 & n = 0, \\ 1 & n \neq 0, \end{cases} \quad \xi_1 = z; \quad \xi_2 = z - d_1 - t; \quad \xi_3 = z - d_1 + d_{1*}.$$

Для базиса (2) выполняется следующее соотношение ортонормировки:

$$\int_V \mathbf{E}_{n,s}^{(i)} \mathbf{E}_{n',s'}^{(i)*} dV = \int_V \mathbf{H}_{n,s}^{(i)} \mathbf{H}_{n',s'}^{(i)*} dV = \delta_{n,n'} \delta_{s,s'}. \quad (3)$$

Коэффициенты  $e_{n,s}^{(i)}$  в разложении (1) определяются тангенциальными составляющими электрического поля на границах выбранных областей

$$(\omega_{n,s}^{(i)2} - \omega^2) e_{n,s}^{(i)} = i c \omega_{n,s}^{(i)} \int [\mathbf{E} H_{n,s}^{(i)*}] ds. \quad (4)$$

Поскольку тангенциальная составляющая электрического поля  $E_T$  на металлической поверхности равна нулю, то в (4) поверхностями интегрирования для первой и второй областей являются круги, расположенные на противоположных плоскостях отверстия в экране, а для третьей области — две цилиндрические поверхности и два круга, по которым эта область контактирует с двумя первыми. Учитывая это, из (4) получим

$$(\omega_{k,l}^{(i)2} - \omega^2)e_{k,l}^{(i)} = \sum_{n,s} e_{n,s}^{(3)} L_{n,s,k,l}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (5a)$$

$$e_{n,s}^{(3)} = \sum_{n',s'} (e_{n',s'}^{(1)} T_{n',s',n,s}^{(1)} + e_{n',s'}^{(2)} T_{n',s',n,s}^{(2)}), \quad (5b)$$

$$L_{n,s,k,l}^{(1)} = ic\omega_{k,l}^{(1)} 2\pi \int_0^a r dr E_{n,s,r}^{(3)} H_{k,l,\phi}^{(1)*}, \quad z=d_1$$

$$L_{n,s,k,l}^{(2)} = -ic\omega_{k,l}^{(2)} 2\pi \int_0^a r dr E_{n,s,r}^{(3)} H_{k,l,\phi}^{(2)*}, \quad z=d_1+t$$

$$T_{n',s',n,s}^{(1)} = \frac{2\pi ic\omega_{n,s}^{(3)}}{\omega_{n,s}^{(3)2} - \omega^2} \left[ -a \int_{d_1-d_1*}^{d_1} dz E_{n',s',z}^{(1)} H_{n,s,\phi}^{(3)*} - \int_0^a r dr E_{n',s',r}^{(1)} H_{n,s,\phi}^{(3)*}, \quad z=d_1-d_1* \right],$$

$$T_{n',s',n,s}^{(2)} = \frac{2\pi ic\omega_{n,s}^{(3)}}{\omega_{n,s}^{(3)2} - \omega^2} \left[ -a \int_{d_1+t}^{d_1+t+d_2*} dz E_{n',s',z}^{(2)} H_{n,s,\phi}^{(3)*} + \int_0^a r dr E_{n',s',r}^{(2)} H_{n,s,\phi}^{(3)*}, \quad z=d_1+t+d_2* \right].$$

Подставив (5б) в (5а), а также введя для удобства вместо  $e_{k,l}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) новые переменные

$$a_{k,l}^{(i)} = e_{k,l}^{(i)} \frac{\lambda_l J_0(\lambda_l a/b_i)}{\omega_{k,l}^{(i)} \sqrt{\theta_k} J_1(\lambda_l)},$$

получим систему уравнений только для амплитуд полей в 1-й и 2-й областях

$$\theta_k Z_{k,l}^{(i)} a_{k,l}^{(i)} = \sum_{n',s'} \left( a_{n',s'}^{(1)} V_{n',s',k,l}^{(i,1)} + a_{n',s'}^{(2)} V_{n',s',k,l}^{(i,2)} \right), \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

где

$$Z_{k,l}^{(i)} = \omega_{k,l}^{(i)2} - \omega^2,$$

$$V_{n',s',k,l}^{(i,j)} = \sum_{n',s'} L_{n',s',k,l}^{(i)} T_{n',s',n,s}^{(j)} \frac{\lambda_l \omega_{n',s'}^{(i)} J_1(\lambda_{s'}) J_0(\lambda_l a/b_i)}{\lambda_s \omega_{k,l}^{(i)} J_1(\lambda_l) J_0(\lambda_s a/b_i)} \sqrt{\theta_n \theta_k}. \quad (7)$$

Проведя элементарные, но громоздкие вычисления, получим следующее выражение для коэффициентов  $V_{n',s',k,l}^{(i,j)}$

$$V_{n',s',k,l}^{(i,j)} = (-1)^{1+i(1+k)+j(1+n')} \alpha_{i,j} \gamma_{l,i} \sum_s \sigma_{s,l,i} \Delta_{s,n',j} \times \\ \times \left[ f_s^{(i,j)} - \beta_i Z_{n',s'}^{(j)} \sigma_{s,s',j} R_{n',j} F_s^{(i,j)} \right],$$

где

$$\alpha_{i,j} = 4a^3 c^3 \left( \sqrt{d_i d_j} b_i^2 b_j^2 \right)^{-1}, \quad \gamma_{l,i} = \lambda_l^2 J_0^2(\lambda_l a/b_i) / J_1^2(\lambda_l),$$

$$\sigma_{s,l,i} = (\lambda_s^2 = a^2 \lambda_l^2 / b_i^2)^{-1}, \quad \Delta_{s,n,j} = [\lambda_s^2 - \Omega^2 + (\pi a n / d_j)^2]^{-1},$$

$$\beta_i = 2a^3 / (c^2 d_i), \quad R_{n,j} = \pi n \sin(\pi n d_{j*} / d_j),$$

$$F_s^{(i,j)} = \frac{1}{\text{sh}(q_s)} \begin{cases} \text{sh}[q_s(1 - d_{i*}/l_*)], & i = j, \\ \text{sh}[q_s d_{i*}/l_*], & i \neq j, \end{cases}$$

$$f_s^{(i,j)} = \frac{\mu_s}{\text{sh}(q_s)} \begin{cases} \text{ch}[q_s] - \text{ch}[q_s(1 - 2d_{i*}/l_*)], & i = j, \\ \text{ch}[q_s(d_{2*} + d_{1*})/l_*] - \text{ch}[q_s(d_{2*} - d_{1*})/l_*], & i \neq j, \end{cases}$$

$$q_s = \mu_s l_* / a, \quad \mu_s = \sqrt{\lambda_s^2 - \Omega^2}, \quad \Omega = \omega a / c.$$

Однородная система уравнений (6) описывает взаимодействие двух бесконечных выборок осцилляторов, каковыми являются собственные колебания замкнутых резонаторов (без отверстия связи в разделяющем экране) и в принципе может быть использована для расчета необходимых электродинамических характеристик связанных резонаторов. Однако система (6) обладает тремя недостатками, затрудняющими проведение как аналитического, так и численного исследования. Во-первых, структура системы (6) практически не позволяет проводить аналитических исследований, в частности получение характеристик в хорошо изученном предельном случае  $t = 0$  и  $a \rightarrow 0$ . Во-вторых, она является двумерной, что требует значительных вычислительных ресурсов при численном анализе. В-третьих, в силу наличия особенностей поля на острых углах отверстия в экране коэффициенты  $V_{n',s',k,l}^{(i,j)}$  с ростом индексов уменьшаются медленно. Наши исследования показали, что система уравнений (6) может быть приведена к виду, не имеющему двух первых недостатков. Ниже изложены результаты этих исследований.

### Вывод основных уравнений

Будем искать амплитуды собственных колебаний  $a_{k,l}^{(i)}$ , за исключением основных колебаний ( $(k, l) \neq (0, 1)$ ), в виде

$$\theta_k Z_{k,l}^{(i)} a_{k,l}^{(i)} = a_{0,1}^{(1)} x_{k,l}^{(i,1)} + a_{0,1}^{(2)} x_{k,l}^{(i,2)}. \quad (8)$$

Вводя вместо одной последовательности неизвестных  $\{a_{k,l}^{(i)}\}$  две новые  $\{x_{k,l}^{(i,1)}\}$  и  $\{x_{k,l}^{(i,2)}\}$ , мы вправе наложить одно дополнительное условие на новые последовательности. Будем считать, что  $\{x_{k,l}^{(i,1)}\}$  удовлетворяют уравнениям

$$x_{k,l}^{(i,1)} = \sum'_{n',s'} \left( \frac{x_{n',s'}^{(1,1)}}{\theta_{n'} Z_{n',s'}^{(1)}} V_{n',s',k,l}^{(i,1)} + \frac{x_{n',s'}^{(2,1)}}{\theta_{n'} Z_{n',s'}^{(2)}} V_{n',s',k,l}^{(i,2)} \right) + V_{0,1,k,l}^{(i,1)},$$

$$(k,l) \neq (0,1); \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Тогда из уравнения (6) следует, что  $\{x_{k,l}^{(i,2)}\}$  должны удовлетворять соотношениям

$$x_{k,l}^{(i,2)} = \sum'_{n',s'} \left( \frac{x_{n',s'}^{(1,2)}}{\theta_{n'} Z_{n',s'}^{(1)}} V_{n',s',k,l}^{(i,1)} + \frac{x_{n',s'}^{(2,2)}}{\theta_{n'} Z_{n',s'}^{(2)}} V_{n',s',k,l}^{(i,2)} \right) + V_{0,1,k,l}^{(i,2)},$$

$$(k,l) \neq (0,1); \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

В уравнениях (9), (10) и везде ниже штрих в суммах означает, что  $(n', s') \neq (0, 1)$ .

При этом, как следует из (6), амплитуды основных колебаний  $(k, l) = (0, 1)$  будут удовлетворять уравнениям

$$2Z_{0,1}^{(i)} a_{0,1}^{(1)} = a_{0,1}^{(1)} \left[ V_{0,1,0,1}^{(i,1)} + \sum'_{n',s'} \left( \frac{x_{n',s'}^{(1,1)}}{\theta_{n'} Z_{n',s'}^{(1)}} V_{n',s',0,1}^{(i,1)} + \frac{x_{n',s'}^{(2,1)}}{\theta_{n'} Z_{n',s'}^{(2)}} V_{n',s',0,1}^{(i,2)} \right) \right] +$$

$$+ a_{0,1}^{(2)} \left[ V_{0,1,0,1}^{(i,2)} + \sum'_{n',s'} \left( \frac{x_{n',s'}^{(1,2)}}{\theta_{n'} Z_{n',s'}^{(1)}} V_{n',s',0,1}^{(i,1)} + \frac{x_{n',s'}^{(2,2)}}{\theta_{n'} Z_{n',s'}^{(2)}} V_{n',s',0,1}^{(i,2)} \right) \right]. \quad (11)$$

Обозначим

$$w_s^{(i,j)} = (-1)^{j+1} 3\pi \left( f_s^{(i,1)} y_s^{(1,j)} - f_s^{(i,2)} y_s^{(2,j)} - \beta_1 F_s^{(i,1)} p_s^{(1,j)} + \beta_1 F_s^{(i,1)} p_s^{(1,j)} \right),$$

$$(12)$$

где

$$y_s^{(i,1)} = \frac{\alpha_{i,i}}{\alpha_{i,j}} \left[ \delta_{i,j} \Delta_{s,0,i} + \sum'_{n',s'} (-1)^{i \times n'} \Delta_{s,n,i} \frac{x_{n',s'}^{(i,j)}}{\theta_{n'} Z_{n',s'}^{(i)}} \right],$$

$$p_s^{(i,j)} = \frac{\alpha_{i,i}}{\alpha_{i,j}} \sum'_{n',s'} (-1)^{i \times n'} \Delta_{s,n,i} \frac{x_{n',s'}^{(i,j)}}{\theta_{n'} Z_{n',s'}^{(i)}}.$$

Тогда уравнения (11) можно привести к виду

$$(\omega_{0,1}^{(1)2} - \omega^2) a_{0,1}^{(1)} = -\omega_{0,1}^{(1)2} \frac{2a^3}{3\pi b_1^2 d_1 J_1^2(\lambda_1)} \left[ \Lambda_{1,1} a_{0,1}^{(1)} - \frac{b_1^2 \sqrt{d_1}}{b_2^2 \sqrt{d_2}} \Lambda_{1,2} a_{0,1}^{(2)} \right], \quad (13a)$$

$$(\omega_{0,1}^{(2)2} - \omega^2) a_{0,1}^{(2)} = -\omega_{0,1}^{(2)2} \frac{2a^3}{3\pi b_2^2 d_2 J_1^2(\lambda_1)} \left[ \Lambda_{2,2} a_{0,1}^{(2)} - \frac{b_2^2 \sqrt{d_2}}{b_1^2 \sqrt{d_1}} \Lambda_{2,1} a_{0,1}^{(1)} \right]. \quad (13б)$$

При этом коэффициенты  $\Lambda_{i,k}$ , определяющие сдвиги частот и связь резонаторов, определяются выражением

$$\Lambda_{i,k} = J_0^2(\lambda_1 a/b_i) \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_{s,1,i} w_s^{(i,k)}, \quad (14)$$

а  $w_s^{(i,k)}$  являются решением следующей пары систем линейных алгебраических уравнений:

$$w_m^{(1,1)} + \sum_{s=1}^{\infty} \left( w_s^{(1,1)} G_{m,s}^{(1,1)} + w_s^{(2,1)} G_{m,s}^{(1,2)} \right) = 3\pi f_m^{(1,1)} / \mu_m^2, \\ w_m^{(2,1)} + \sum_{s=1}^{\infty} \left( w_s^{(2,1)} G_{m,s}^{(2,2)} + w_s^{(1,1)} G_{m,s}^{(2,1)} \right) = 3\pi f_m^{(2,1)} / \mu_m^2, \quad (15a)$$

$$w_m^{(2,2)} + \sum_{s=1}^{\infty} \left( w_s^{(2,2)} G_{m,s}^{(2,2)} + w_s^{(1,2)} G_{m,s}^{(2,1)} \right) = 3\pi f_m^{(2,2)} / \mu_m^2, \\ w_m^{(1,2)} + \sum_{s=1}^{\infty} \left( w_s^{(1,2)} G_{m,s}^{(1,1)} + w_s^{(2,2)} G_{m,s}^{(1,2)} \right) = 3\pi f_m^{(1,2)} / \mu_m^2, \quad (15b)$$

где

$$G_{m,s}^{(i,j)} = f_m^{(i,j)} T_{m,s}^{(j)} - F_m^{(i,j)} \delta_{m,s} \frac{\text{sh}[\mu_m(d_i - d_{i*})/a]}{\text{sh}(\mu_m d_i/a)}, \\ T_{m,s}^{(j)} = \pi \frac{a}{b_j} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\theta_l^{(j)3} J_0^2(\theta_l^{(j)}) \chi_l^{-1} E_l(a/d_j, \nu_l^{(j)})}{(\lambda_m^2 - \theta_l^{(j)2})(\lambda_s^2 - \theta_l^{(j)2})} - \frac{1}{2} \delta_{m,s} E_2(a/d_j, \mu_m) + \\ + \frac{\pi a^2}{\mu_m^2 b_j d_j} \frac{\theta_1^{(j)3} J_0^2(\theta_1^{(j)}) \chi_1^{-1}}{(\lambda_m^2 - \theta_1^{(j)2})(\lambda_s^2 - \theta_1^{(j)2})}, \\ E_l(x, y) = \begin{cases} \text{cth}(y/x)/y - x/y^2, & l = 1, \\ \text{cth}(y/x)/y, & l \neq 1, \end{cases}$$

$$\chi_l = J_1^2(\lambda_l) \pi \lambda_l / 2, \quad \theta_l^{(j)} = \lambda_l a / b_j, \quad \nu_l^{(j)} = \sqrt{\theta_l^{(j)2} - \Omega^2}.$$

Таким образом, систему уравнений (6), описывающую взаимодействие бесконечного числа осцилляторов (собственных колебаний замкнутых резонаторов), удалось строго привести к виду, формально описывающему взаимодействие двух базовых осцилляторов. В рассматриваемом случае в качестве таких базовых осцилляторов выбраны  $E_{010}$  колебания замкнутых резонаторов. Однако их выбор произволен и определяется постановкой задачи. Весь спектр резонансных свойств системы связанных резонаторов в таком подходе заключен в зависимости коэффициентов  $\Lambda_{i,k}$  от частоты. Такая форма описания системы связанных резонаторов удобна для решения многих задач, в которых исследуются электродинамические характеристики в ограниченном частотном диапазоне, определенном взаимодействием двух близких собственных колебаний.

Прежде чем перейти к изложению результатов анализа системы (13), остановимся на вопросе выбора геометрических размеров вспомогательной области  $\mathcal{Z}$ , а именно выборе значений  $d_{i*}$ . Как показали расчеты, решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемых путем редукции бесконечных систем (15), при соответствующих значениях  $S$  (максимальное значение индекса  $s$  в (15)) и  $L$  (максимальное значение индекса  $l$  в сумме, определяющей  $T_{m,s}^{(i)}$ ) практически не зависят от этого параметра. Так, при  $S = 100$ ,  $L = 40000$ ,  $d_1 = d_2 = 3.5$  см,  $b_1 = b_2 = 4$  см,  $t = 0.4$  см,  $a = 1$  см,  $f = 0$  и  $d_* = d_{1*} = d_{2*}$  расчеты дают  $d_* = 3.5$  см,  $\Lambda_{11} = 0.773125$  и  $d_* = 10^{-7}$  см,  $\Lambda_{11} = 0.773125$ .

Рассмотрим случай малых отверстий ( $a \rightarrow 0$ ) и бесконечно тонкого экрана ( $t = 0$ ), который хорошо изучен к настоящему времени [1-7]. Как следует из (13), для вычисления значений коэффициентов связи с точностью до  $a^3$  расчет коэффициентов  $\Lambda_{i,k}$  должен быть выполнен в приближении  $a = 0$ . При этом возникает вопрос о том, каким образом вычислять значения коэффициентов  $T_{m,s}^{(j)}$ , поскольку каждый член суммы в выражении, определяющем эти коэффициенты, при  $a \rightarrow 0$  стремится к нулю. Если эта сумма сходится к какому-либо значению, то необходимо учитывать бесконечное число слагаемых. Данное обстоятельство является отражением факта наличия особенностей электромагнитного поля на ребрах отверстия, о котором упоминалось выше. Поэтому использовать исходную систему уравнений (6) для расчетов характеристик рассматриваемой системы связанных резонаторов в области малых отверстий практически невозможно. Модифицированная система уравнений (13) пригодна для получения решения при малых  $a$  с точностью до  $a^3$ . В пределе  $a \rightarrow 0$  вклад в сумму, входящую в выражение, определяющее  $T_{m,s}^{(j)}$ , слагаемых с малыми значениями индекса  $l$  стремится к нулю, а при больших  $l$  разность соседних корней функции Бесселя стремится к числу  $\pi$  ( $\lambda_{l+1} - \lambda_l \approx \pi$ ), при этом указанная сумма стремится к интегралу, не зависящему от геометрических параметров,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \pi \frac{a}{b_j} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\theta_l^{(j)3} J_0^2(\theta_l^{(j)}) \chi_l^{-1} E_l(a/d_j, \nu_l^{(j)})}{(\lambda_m^2 - \theta_l^{(j)2})(\lambda_s^2 - \theta_l^{(j)2})} = \int_0^{\infty} \frac{d\theta \theta^2 J_0^2(\theta)}{(\lambda_m^2 - \theta^2)(\lambda_s^2 - \theta^2)} = k_{m,s}. \quad (16)$$

Поскольку в рассматриваемом пределе  $f_m^{(i,j)} \rightarrow \lambda_m$ , то из (15) следует, что  $w_m^{(i,j)} \rightarrow w_m$ , где  $w_m$  есть решение системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_{m,s} w_s = 3\pi / (2\lambda_m^2). \quad (17)$$

При этом коэффициенты  $\Lambda_{i,k}$  не зависят от геометрических размеров резонаторов  $\Lambda_{i,k} = \Lambda = \sum_{s=1}^{\infty} w_s / \lambda_s^2$ . Нам не удалось аналитически получить значение постоянной  $\Lambda$ . Численный расчет, выполненный путем решения редуцированной системы (17), показал, что с ростом  $S$



Зависимость коэффициентов  $\Lambda_{i,k} = \Lambda$  и коэффициентов связи  $\bar{\Lambda}$  от частоты  $f$  ( $d_1 = d_2 = 3.5$  см,  $b_1 = b_2 = 4$  см,  $t = 0.0$  см,  $f_{010} = 2.868563$  ГГц)

$f, \text{ ГГц}$	$a = 1 \text{ см}$		$a = 1.5 \text{ см}$	
	$\Lambda$	$\bar{\Lambda}$	$\Lambda$	$\bar{\Lambda}$
0	0.896590	0.012606	0.788984	0.037440
1	0.897783	0.012623	0.793784	0.037667
2	0.900862	0.012666	0.808207	0.038352
3	0.903614	0.012705	0.831250	0.039445

$\Lambda \rightarrow 1$ , что хорошо согласуется с результатами, полученными другими авторами [1-7]. Так, при  $S = 200$  и соответствующем выборе шага и интервала интегрирования в (16), когда решение (17) перестает зависеть от этих параметров,  $\Lambda = 0.9989$ .

В отличие от разработанных ранее подходов (см., например, [1-4]) полученная нами система уравнений (13) позволяет рассчитывать зависимости электродинамических характеристик рассматриваемой системы от любых параметров, поскольку при ее получении не было сделано никаких предположений. На основе этой системы легко рассчитать собственные частоты. Мы не будем останавливаться на этом вопросе, а проведем анализ зависимостей коэффициентов  $\Lambda_{i,k}$  от параметров, которые невозможно было исследовать в ранее разработанных моделях.

Прежде всего выясним влияние непотенциальности электромагнитного поля в области взаимодействия на значения коэффициентов  $\Lambda_{i,k}$ , поскольку во всех предыдущих работах [1-4,7], где исследовалась связь через малые отверстия, делалось предположение о потенциальности поля вблизи отверстия. В нашей модели изучение данного вопроса сводится к исследованию зависимости коэффициентов  $\Lambda_{i,k}$  от частоты  $f$ , при этом значению  $f = 0$  соответствует предположение о потенциальности поля в области взаимодействия.

Так как частота входит в соответствующие коэффициенты только в виде выражения  $\Omega = \omega a/c$ , то отсюда следует, что изменение  $\Lambda$  при увеличении частоты от 0 до  $f_{010}$  должно зависеть от величины отверстия связи: чем меньше  $a$ , тем слабее  $\Lambda$  должно зависеть от частоты. Это подтверждается результатами расчетов, представленными в таблице. Из таблицы следует, что ошибка в расчете коэффициентов связи  $\bar{\Lambda}$  ( $\bar{\Lambda} = \frac{2a^3}{3\pi b_1^2 d_1 J_1^2(\lambda_1)} \Lambda$ ) при  $a = 1 \text{ см}^1$  составляет порядка  $10^{-4}$  (эквивалентный сдвиг по частоте  $\approx 300$  кГц) и, следовательно, расчеты можно проводить в квазистатическом приближении. Однако уже для  $a = 1.5 \text{ см}$  ошибка составляет порядка  $2 \cdot 10^{-3}$  (эквивалентный сдвиг по частоте  $\approx 6$  МГц), что является недопустимым при проведении точных расчетов.

<sup>1</sup> Размеры отверстия связи, характерные для широко используемых в ускорительной технике диафрагмированных волноводов при рабочей частоте порядка 3 ГГц, составляют  $a = 0.9-1.5$  см.

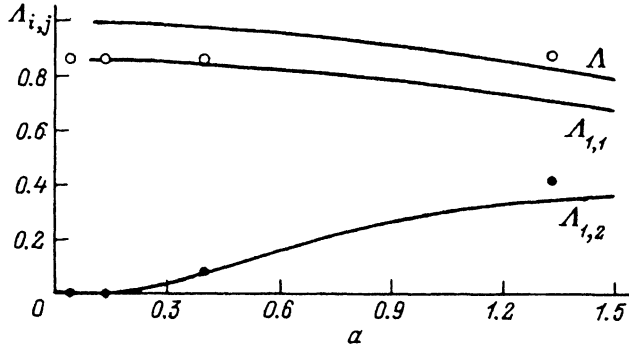


Рис. 2.

Важное практическое значение имеет зависимость коэффициентов связи от радиуса отверстия связи  $a$ . Анализ выражения (14) показывает, что  $\Lambda_{i,k}$  зависит как от указанного выше параметра  $\Omega = \omega a/c$ , так и от отношения  $a$  ко всем геометрическим параметрам резонаторов и толщине экрана ( $a/d_j$ ,  $a/b_j$ ,  $a/t$ ,  $j = 1, 2$ ). Результаты расчетов интересующей нас зависимости на основе разработанной нами модели при предположении о потенциальности поля вблизи отверстия ( $f = 0$ ) представлены на рис. 2. На рис. 2 также представлены результаты расчетов коэффициентов связи для различных значений параметра  $a/t$  при  $a/d_j \rightarrow 0$ ,  $a/b_j \rightarrow 0$  [9]. Как следует из рис. 2, учет конечности параметров  $a/d$  и  $a/b$  приводит не только к существенному изменению численных значений коэффициентов связи, но и зависимости  $\Lambda_{i,k}$  от  $a$ . Например, при конечной толщине экрана коэффициент  $\Lambda_{1,1}$ , определяющий сдвиг собственных частот резонаторов, с ростом  $a$  уменьшается, а не растет, как это следует из результатов работы [9].

Из базовой системы уравнений (13) вытекает, что для одинаковых резонаторов зависимость коэффициентов связи от их длины  $d$  определяется отношением  $\Lambda_{i,k}/d$ . Разработанная к настоящему времени модель системы связанных резонаторов [1-7] справедлива при выполнении условия  $a/d \ll 1$ . При этом  $\Lambda_{i,k}$  не зависит от  $d$  и коэффициенты связи обратно пропорциональны  $d$ . Результаты наших расчетов, представленных на рис. 3, показывают, что в области  $a/d > 1$  зависимость коэффициентов связи от  $d$  существенно изменяется, а именно при  $d \rightarrow 0$   $\Lambda_{i,k}/d$  стремится к постоянным значениям, которые определяются дру-

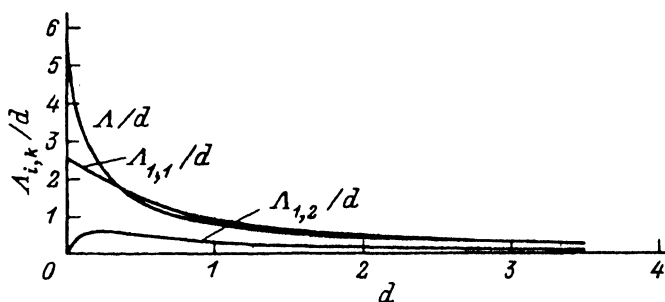


Рис. 3.

гими геометрическими размерами резонаторов. Так, для случая  $t \neq 0$  коэффициент  $\Lambda_{1,2}/d$ , определяющий разность частот 0 и  $\pi$  типа собственных колебаний система, стремится к нулю, в то время как коэффициент  $\Lambda_{1,1}/d$ , определяющий сдвиг собственных частот, стремится к ненулевому значению. Это означает, что для случая двух тонких ( $d/t \gg 1$ ) резонаторов разность частот 0 и  $\pi$ -типа собственных колебаний будет мала. Этот результат согласуется с тем обстоятельством, что при  $d = 0$  рассматриваемая система превращается в одиночный резонатор с радиусом  $r = a$  и длиной  $t$ . Однако при расчете точных характеристик в этом случае необходимо учитывать зависимость параметров от частоты.

### Заклучение

Таким образом, нами предложена новая аналитическая модель для исследования связи двух резонаторов через отверстие в разделяющем экране конечной толщины без предположения о малости каких либо параметров.

1. Первые на основе строгого электродинамического подхода рассчитано значение коэффициентов связи двух цилиндрических резонаторов в пределе малых отверстий и бесконечно тонкой стенки.

2. Приведенные результаты численного расчета зависимостей электродинамических характеристик от параметров, которые невозможно было исследовать в ранее разработанных моделях, показывают, что в ряде случаев влияние непотенциальности полей вблизи отверстия связи, а также близость стенок резонаторов могут быть существенными.

### Список литературы

- [1] *Bathe H.A.* // Phys. Rev. 1944. Vol. 66. N 7. P. 163-182.
- [2] *Владимирский В.В.* // ЖТФ. 1947. Т. 17. Вып. 11. С. 1277-1282.
- [3] *Алиев А.И., Файнберг Я.Б.* // УФН. 1951. Т. 44. Вып. 3. С. 321-368.
- [4] *Bevensee R.M.* Electromagnetic Slow Wave Systems. New York; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc. 1964.
- [5] *Wheeler H.A.* // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 1964. Vol. MTT-12. P. 231-244.
- [6] *Gluckstern R.L., Li R., Copper R.K.* // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 1990. Vol. MTT-38. N 2. P. 186-192.
- [7] *Gluckstern R.L.* // AIP Conf. Proc. 249. Vol. 1. New York, 1992. P. 236-276.
- [8] *McDonald N.A.* // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 1972. Vol. MTT-20. N 10. P. 689-695.
- [9] *Gluckstern R.L., Diamond J.A.* // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 1991. Vol. MTT-39. N 2. P. 274-279.
- [10] *Собенин Н.П., Школьников Э.Я.* // Ускорители. М.: Атомиздат, 1970. Вып. 12. С. 96-101.
- [11] *Прохода И.Г., Лозяной В.И., Онуфриенко В.М.* и др. Распространение электромагнитных волн в неоднородных волноводных системах. Днепропетровск, 1977. 83 с.
- [12] *Прохода И.Г., Чумаченко В.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 16. № 10. С. 1558.