

01;03

ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ В ЗАРЯЖЕННОЙ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

© С.О.Ширяева, О.А.Григорьев, М.И.Муничев, А.И.Григорьев

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия
(Поступило в Редакцию 29 мая 1995 г.)

На основе численного анализа дисперсионного уравнения для волновых движений в вязко-упругой несжимаемой жидкости показано, что капиллярные волновые движения возможны лишь в ограниченном диапазоне изменения упругих свойств жидкости. При превышении некоторого порогового значения влияние упругих свойств на движение жидкости становится определяющим и возникающие в жидкости движения, как волновые, так и аperiodические, имеют существенно упругую природу. Найдены две ветви упругих волн, различающихся дисперсионными свойствами. Волны одной из них позволяют строить решения солитонного типа. Инкремент и критические условия неустойчивости Тонкса-Френкеля практически не зависят от упругих свойств жидкости. В области значений физических параметров, где упругие свойства определяют все виды движений жидкости, неустойчивость заряженной поверхности жидкости реализуется за счет экспоненциального нарастания амплитуды аperiodических упругих ее движений.

Введение

Хорошо известно (см., например, [1,2]), что при достаточно малых временах внешнего воздействия ($t \leq 10^{-5}$ с) жидкости проявляют упругие свойства: они вначале упруго деформируются, после же прекращения действия внешней силы в них остаются остаточные напряжения сдвига, затухающие за время порядка характерного времени релаксации напряжений в жидкости $t \sim 10^{-5}$ с [3]. Этот эффект должен проявляться в капиллярном волновом движении, поскольку уже для волн длиной ~ 10 мкм их период сравним с характерным временем релаксации упругих напряжений τ . Как показано в [4-6], учет упругих свойств жидкости приводит к заметному усложнению спектра волновых движений, вызывая ограничение спектра капиллярных волн и увеличение скорости диссипации энергии волнового движения за счет возникновения на высоких частотах волновых движений фонованного типа.

В [5] дисперсионное уравнение для волновых движений вязко-упругой жидкости было получено в рамках микроскопического подхода методами статистической механики. В нижеследующем изложении весь анализ будет проведен в рамках модели сплошной среды на

основе уравнений гидродинамики вязкой жидкости (как это было сделано в [4]) в предположении, что вязко-упругие свойства жидкости можно описать посредством введения комплексной вязкости посредством формулы Максвелла [1,2]

$$\nu = \nu_0(1 - i\omega\tau)^{-1}. \quad (1)$$

Здесь ν_0 — коэффициент кинематической вязкости на нулевой частоте, ω — комплексная частота, i — мнимая единица. Для самого феномена возникновения в жидкости при больших частотах внешнего воздействия ω упругих деформаций с их последующей релаксацией к нулевому уровню за время $t \sim \tau$ и превращением энергии упругой деформации в тепловую в [4] предложено название “эффекта релаксации вязкости”. Такое название, по-видимому, должно подчеркнуть факт присутствия в феномене релаксационных явлений, обеспечивающих начальное накопление энергии внешнего воздействия в виде энергии упругих деформаций с последующей ее трансформацией в кинетическую энергию поля скоростей движущейся жидкости и на финальной стадии в тепловую энергию за счет действия вязкости. Под термином “релаксация” традиционно понимается необратимый процесс затухания виртуальных (флуктуационных) отклонений физических параметров системы от равновесных значений. В этой связи названия “эффект релаксации упругости жидкости” или “эффект дисперсии вязкости” были бы более адекватны физической сути феномена, так как речь идет лишь о зависимости механизма диссипации энергии внешнего воздействия от характерного времени его реализации (в задачах о волновом движении жидкости удобно говорить и о зависимости механизма диссипации энергии волны от ее частоты).

В нижеследующем рассмотрении проведено исследование закономерностей реализации в вязко-упругой жидкости капиллярного волнового движения и проявления неустойчивости ее заряженной поверхности.

1. Пусть имеется вязкая несжимаемая идеально электропроводная жидкость, заполняющая в поле сил тяжести ($\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$, здесь \mathbf{n}_z — орт декартовой оси z , \mathbf{g} — ускорение силы тяжести) полупространство $z < 0$. Пусть также свободная поверхность жидкости несет нескомпенсированный электрический заряд, однородно распределенный с плотностью κ . Уравнение свободной поверхности жидкости в отсутствие возмущений имеет вид $z = 0$. Обозначим через σ и ν коэффициенты поверхностного натяжения и кинематической вязкости жидкости, а через ρ — ее удельную плотность.

Зададимся вопросом об отыскании спектра капиллярных волн в жидкости при вышесформулированных условиях. С этой целью будем искать волновые решения уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U} + \mathbf{g}, \quad \nabla\mathbf{U} = 0. \quad (2)$$

Здесь $P(\mathbf{r}, t)$ — давление внутри жидкости, $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей. Решения системы (2) на возмущенной капиллярным волновым движе-

нием свободной поверхности жидкости, описываемой уравнением вида

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv z - \zeta(x, t) = 0,$$

должны удовлетворять граничным условиям: кинематическому

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla F = 0 \quad (3)$$

и динамическим для касательных

$$\tau(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n}(\tau \nabla) \mathbf{U} = 0 \quad (4)$$

и нормальной

$$(P(\mathbf{r}, t) - P_0) - 2\rho\nu\mathbf{n}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) - P_\sigma + P_\varkappa = 0 \quad (5)$$

компонент тензора напряжений. В (5) P_0 — постоянное внешнее давление; P_σ и P_\varkappa — давление сил поверхностного натяжения и давление электрического поля на свободной поверхности жидкости, происходящие из-за возмущения $\zeta(x, t) = A \exp(ikx - i\omega t)$ равновесной плоской поверхности жидкости, вызванного капиллярным волновым движением [2,7] (k — волновое число),

$$P_\sigma = -\sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad P_\varkappa = 4\pi\varepsilon^{-1} \varkappa^2 k \zeta.$$

Система уравнений (2) с граничными условиями (3)–(5) представляет собой математическую формулировку решаемой задачи.

Принимая во внимание вязкость жидкости, будем искать течения в ней, разделяя поле скоростей $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ на две компоненты: потенциальную (с потенциалом скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$) и вихревую (описываемую функцией тока), как это проделано в [8], в задаче о волновом движении в вязкой жидкости. Тогда выражение для поля давлений $P(\mathbf{r}, t)$ в жидкости можно записать в виде

$$P(\mathbf{r}, t) = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} - \rho g \zeta. \quad (6)$$

2. Решение задачи (2)–(6) будем искать в виде [8]

$$U_x(x, z, t) = (ikB \exp(-kz) - lC \exp(-lz)) \exp(ikx - i\omega t),$$

$$U_z(x, z, t) = (-kB \exp(-kz) + ikC \exp(-lz)) \exp(ikx - i\omega t),$$

$$l^2 = k^2 - i\omega\nu^{-1}, \quad (7)$$

A , B и C — константы; l — характерный линейный масштаб пространственного изменения вихревой компоненты поля скоростей.

Повторяя те же рассуждения, что и в [8,9], лишь добавив в динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений слагаемое для давления электрического поля, несложно получить дисперсионное соотношение для рассматриваемой системы

$$\omega^2 + 4i\nu k^2 \omega - 4\nu^2 k^4 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu k^2}} \right) = \frac{k}{\rho} (g\rho + \sigma k^2 - 4\pi k \varkappa^2). \quad (8)$$

В принятой временной зависимости амплитуды капиллярных волн (следовательно, лапласовского и электростатического давлений, поля давлений и поля скоростей) вида $\zeta \sim \exp(-i\omega t)$ мнимая отрицательная часть комплексной частоты дает декремент затухания капиллярных волн, а мнимая положительная — инкремент нарастания неустойчивости, которая реализуется, когда правая часть соотношения (8) (по мере увеличения поверхностной плотности электрического заряда) проходит через нуль и становится отрицательной [10]. Вещественная часть комплексной частоты в используемом выражении дает частоту периодического волнового движения.

При аналитическом исследовании учет вязко-упругих свойств жидкости может быть проведен путем введения комплексной вязкости согласно выражению (1) [4,9]. Для этого подставим (1) в (8) и получим дисперсионное уравнение для волновых движений на заряженной поверхности жидкости с учетом дисперсии вязкости. Несложно видеть, что это уравнение будет иметь более высокий порядок относительно частоты, так как к исходным модам, обусловленным действием гравитационных, электрических и капиллярных сил, добавятся моды вязко-упругих колебаний. В безразмерной форме дисперсионное уравнение примет вид

$$[2 - iy(1 - i\delta y)]^2 + \alpha^2(1 - i\delta y)^2 = 4\sqrt{1 - iy(1 - i\delta y)},$$

$$y = \frac{\omega}{\nu_0 k^2}, \quad \delta = \nu_0 k^2 \cdot \tau, \quad \alpha = \frac{\omega_0}{\nu_0 k^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{\rho} (g\rho + \sigma k^2 - 4\pi k \kappa^2). \quad (9)$$

3. Решения этого уравнения, полученные численно при фиксированных значениях параметра δ представлены на рис. 1–7 в виде зависимостей $\text{Re } y = \text{Re } y(\alpha^2)$ и $\text{Im } y = \text{Im } y(\alpha^2)$. Диапазон значений параметра α^2 , в котором проведены расчеты, выбран в виде $|\alpha^2| < 10$ для удобства исследования влияния упругих свойств жидкости на закономерности реализации неустойчивости ее сильно заряженной поверхности, имеющей место, когда α^2 проходит через нуль и становится отрицательным [10].

На рис. 1 приведены результаты расчета спектра капиллярных волн в отсутствии дисперсионных эффектов (в пренебрежении упругими свойствами жидкости). На рис. 2–7 приведены результаты расчета спектра волновых движений жидкости с учетом ее упругих свойств. Из сравнения кривых, приведенных на рис. 1, а также на рис. 2–7, несложно видеть, что учет вязко-упругих свойств жидкости приводит к выявлению новых периодических и аperiodических ее движений. На рис. 8 представлены зависимости $\text{Re } y = \text{Re } y(\delta)$ и $\text{Im } y = \text{Im } y(\delta)$, рассчитанные по (9) при фиксированном значении параметра α^2 .

Прежде чем переходить к анализу данных, приведенных на графиках, отметим, что уравнение (9) является трансцендентным. Можно избавиться от радикала в правой части, возводя во вторую степень обе части соотношения (9). Тогда получится обыкновенное алгебраическое уравнение восьмой степени относительно комплексной переменной y . Ясно, что не все восемь его корней будут иметь физический смысл, так как исходное уравнение (9) из-за наличия в нем радикала

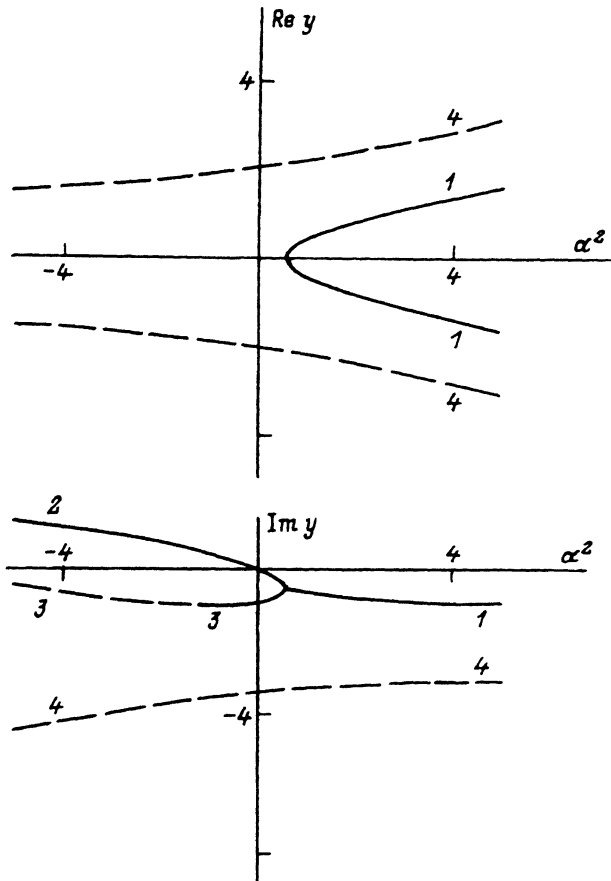


Рис. 1.

определено на двух листах римановой поверхности, т. е. является двузначным. Физически разумные ветви дисперсионного уравнения нужно искать среди решений, определенных на верхнем листе римановой поверхности, соответствующем положительному значению радикала в уравнении (9).

Решения дисперсионного уравнения, получающиеся при отрицательных значениях радикала в (9) (т. е. определенные на нижнем листе римановой поверхности), физического смысла не имеют, так как сам радикал, согласно (7), (8), представляет собой безразмерное отношение l/k , т. е. отношение характерного линейного масштаба пространственного изменения амплитуды вихревой компоненты поля скоростей l к волновому числу k . Это отношение по своему смыслу не может быть отрицательным. Тем не менее на рис. 1–8, иллюстрирующих численные расчеты по (9), приведены все 8 возможных корней уравнения (9). Решения, соответствующие отрицательным значениям радикала, представлены на рисунках штриховыми кривыми. Их учет позволяет нагляднее проследить закономерности изменения различных ветвей дисперсионного уравнения при варьировании физических параметров задачи. Во всяком случае из приведенных рисунков видно, что неко-

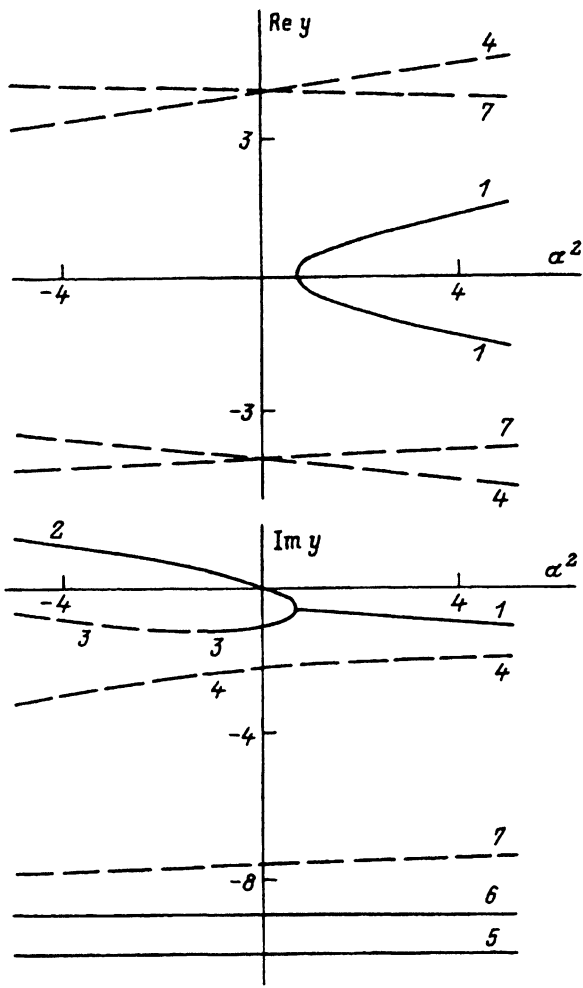


Рис. 2.

торые из ветвей при определенных значениях параметров α^2 и δ уходят с одного листа римановой поверхности на другой и возвращаются обратно при других значениях α^2 и δ .

Нумерация ветвей на всех рисунках унифицирована, чтобы можно было следить за эволюцией физически разумных решений при изменении свойств жидкости и внешних условий задачи.

4. Остановимся более детально на физической информации, содержащейся в приведенных рисунках. На рис. 1 $\delta = 0$. На верхнем листе римановой поверхности определены и, следовательно, реализуются в естественных условиях три ветви капиллярных волновых движений. Ветвь 1 соответствует затухающим волнам; ветви 2 и 3 — чисто аperiодическим движениям жидкости. Часть ветви 2, лежащая в области $\alpha^2 < 0$, дает инкремент неустойчивости Тонкса-Френкеля, вся ветвь 3 и часть ветви 2 (при $\alpha^2 > 0$) описывают вязкое затухание. На нижнем листе римановой поверхности определена ветвь 4, описывающая

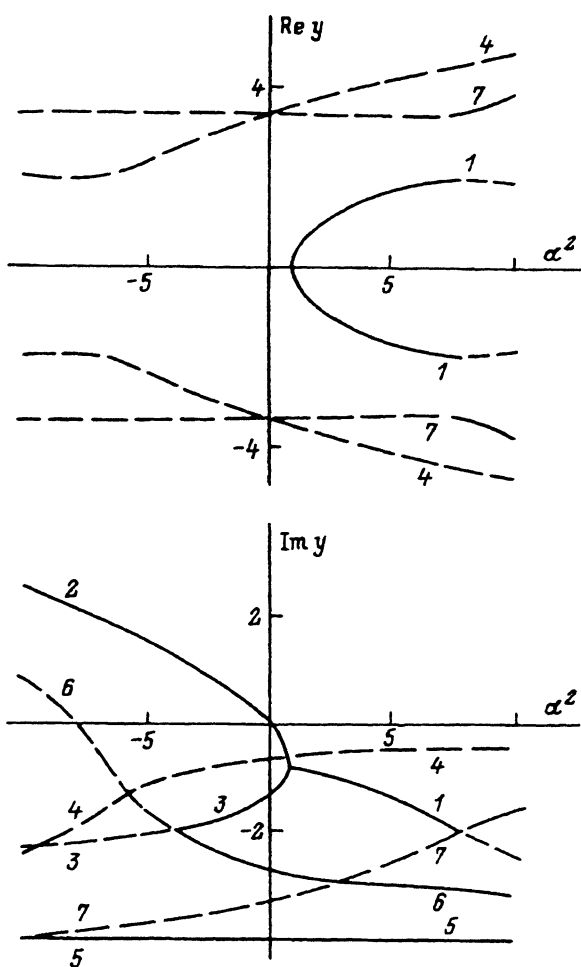


Рис. 3.

затухающие капиллярные волны, которые, однако, не реализуются в условиях, при которых были проведены расчеты.

На рис. 2 $\delta = 0.1$. В дополнение к ранее описанным волновым движениям появляются две ветви 5 и 6 затухающих аperiодических упругих движений жидкости, определенных на верхнем листе римановой поверхности, и одна ветвь 7 затухающих упругих волн, определенная на нижнем листе римановой поверхности.

Отметим, что появление ветви 5 связано с выбором способа аналитического учета упругих свойств жидкости вида (1). Положение ветви 5 на плоскости $y\theta\alpha^2$ находится приравниванием нулю знаменателя в соотношении (1) $\omega = i\tau^{-1}$ (или в безразмерном виде $y = i\delta^{-1}$). Ни от каких других физических параметров, кроме τ , это решение не зависит, что и видно из рис. 2-8.

На рис. 3 $\delta = 0.25$. Все ранее появившиеся и описанные выше ветви дисперсионного уравнения остаются, но структура спектра меняется. Так, ветвь 1 затухающих капиллярных волн при $\alpha^2 \geq 7.8$ уходит на

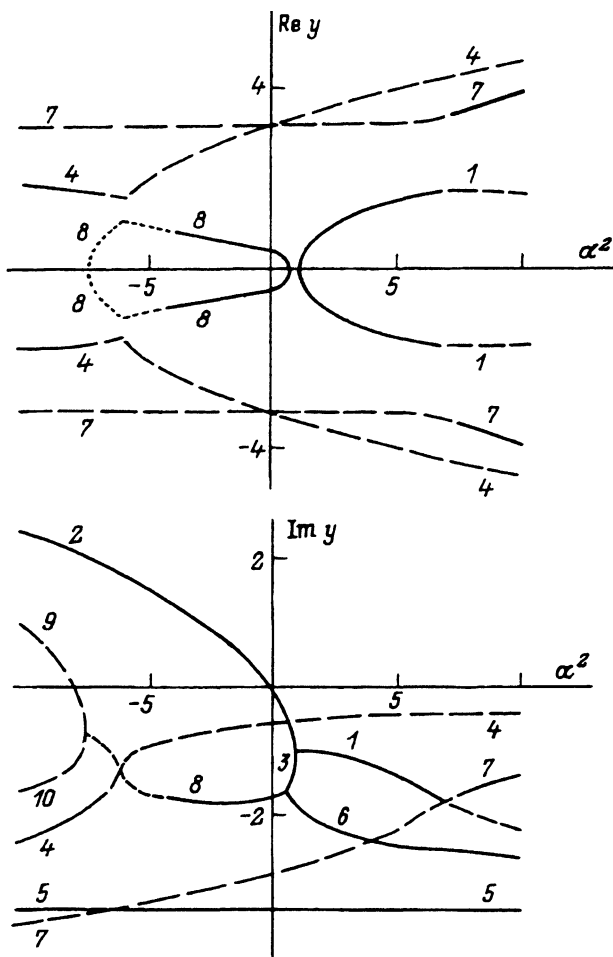


Рис. 4.

нижний лист римановой поверхности, а вместо нее на верхний лист выходит при более высоких частотах ветвь 7 поверхностных упругих затухающих волн. При $\alpha^2 \leq -8$ на верхний лист выходит ветвь 4 затухающих капиллярно-упругих волн. Декремент аperiодического движения δ в области $\alpha^2 < 0$ уменьшается и появляется заметная зависимость его величины от параметра α^2 .

Ветвь 4, имеющая чисто капиллярно-волновое происхождение (рис. 1) выходит, однако, на верхний лист римановой поверхности только при достаточно больших значениях параметра упругости δ (при достаточно заметном влиянии упругих свойств жидкости) и, следовательно, описывает капиллярно-упругие волновые движения.

На рис. 4 $\delta = 0.29$. В дополнение к ранее существовавшим ветвям при $\delta \approx 0.252$ появляется замкнутая ветвь затухающих упругих волн 8, правая часть которой определена на верхнем листе римановой поверхности, а левая часть — на нижнем. Левая часть мнимой компоненты

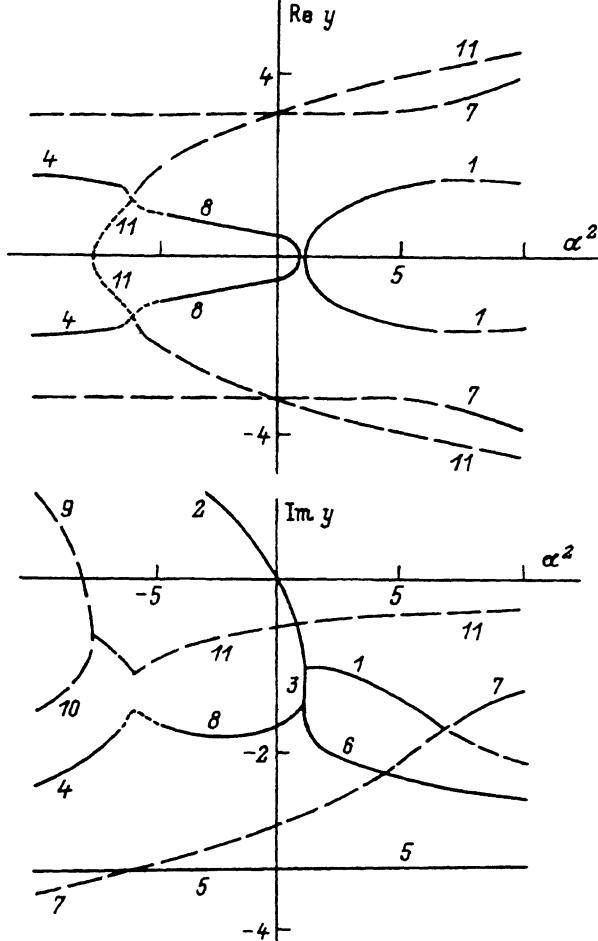


Рис. 5.

ветви 8 ветвится, и появляются два аperiodически затухающих движения 9 и 10, определенных на нижнем листе римановой поверхности.

На рис. 5 $\delta = 0.3$. При увеличении δ от 0.28 до 0.3 происходит заметная деформация ветвей 4 и 8. Для частот (для $\text{Re } y$) верхняя и нижняя вершины замкнутой ветви 8, определенные на нижнем листе римановой поверхности, вытягиваются вдоль оси $\text{Re } y$, а участки обеих ветвей 4, также определенные на нижнем листе, деформируются им навстречу, до касания с ветвью 8, образуя ветвь 11. Для декрементов затухающих движений (для $\text{Im } y$) часть ветви 4, определенная на нижнем листе римановой поверхности, перезамыкается на точку ветвления решений 8-10 и, начиная с $\delta = 0.3$, образует мнимую компоненту новой ветви 11. Ветви 1 и 8 пока не объединены.

Часть ветви 4, определенная на верхнем листе римановой поверхности, перезамыкается на ветвь 8, которая отделяется от точки ветвления решений 8-10. Место соединения ветвей 4 и 8 уходит на нижний лист римановой поверхности.

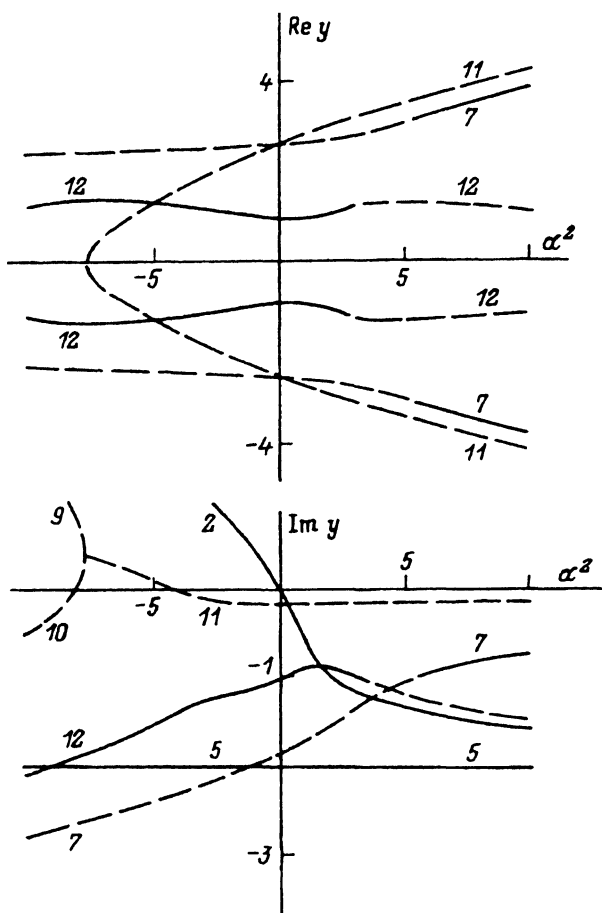


Рис. 6.

На рис. 6 $\delta = 0.5$. Происходит дальнейшая деформация и перезамыкание ветвей дисперсионного уравнения 1, 4, 8, 11. Из объединения ветвей 1, 4 и 8 появляется новая ветвь 12.

Для частот (для $Re y$) решения 4, 8 и 1 объединяются в ветвь 12, определенную на обоих листах римановой поверхности. Декремент затухания ветви 12 образуется из объединения ветвей 1, 4 и 8, также определенных на обоих листах римановой поверхности. Ветвь 3 исчезает. Ветви 2 и 6 объединяются в одну, определенную на верхнем листе римановой поверхности. Вновь образовавшуюся ветвь ниже будем нумеровать цифрой 2.

На рис. 7 $\delta = 1$. Выше описанные и вновь образующиеся ветви еще более деформируются, теряя внешнее сходство с ветвями, их породившими. Мнимая часть ветви 12 разделяется, образуя два новых аперiodических решения 13 и 14, определенных на верхнем листе римановой поверхности. Части решений 7 и 12, определенных на верхнем листе римановой поверхности, смещаются к началу координат. Дальнейшее увеличение δ до 10 приводит к резкому уменьшению части ветви 12 и увеличению части ветви 7, определенных на верхнем листе римановой

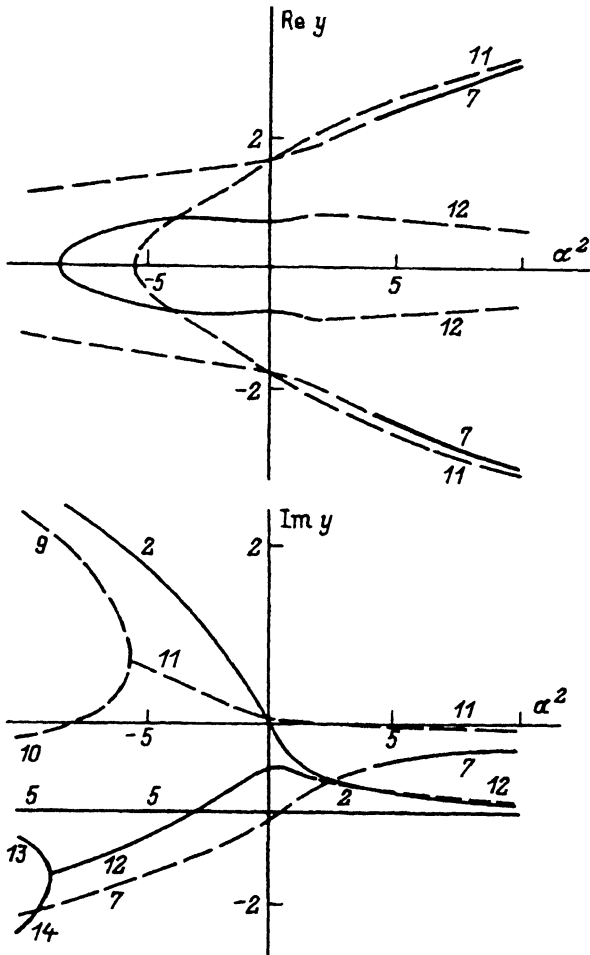


Рис. 7.

поверхности, и к ветвлению мнимой части ветви 7, определенной на нижнем листе римановой поверхности.

На рис. 8 $\alpha^2 = 9$. При $\delta \rightarrow 0$ декременты затухания ветвей упругих затухающих движений жидкости 5, 6 и 7 асимптотически стремятся к бесконечности. Причем ветви 5 и 6 определены на верхнем листе римановой поверхности, ветвь 7 до $\delta \approx 0.25$ также определена на верхнем, а начиная с $\sigma \approx 0.25$ — на нижнем листе римановой поверхности.

При увеличении δ декременты затухания всех ветвей уменьшаются. Частота ветви затухающих упругих волн 7, которая единственная остается на верхнем листе римановой поверхности, при больших δ меняется с изменением δ весьма слабо.

Затухающие капиллярные волны описываются ветвью 1. Несложно видеть, что с увеличением δ частоты и декременты капиллярных волн сначала растут, но при $\delta \approx 0.252$ ветвь 1 претерпевает излом, после чего частоты и декременты капиллярных волн начинают уменьшаться с увеличением δ . При $\delta \approx 0.3$ ветвь 1 уходит на нижний лист римановой поверхности.

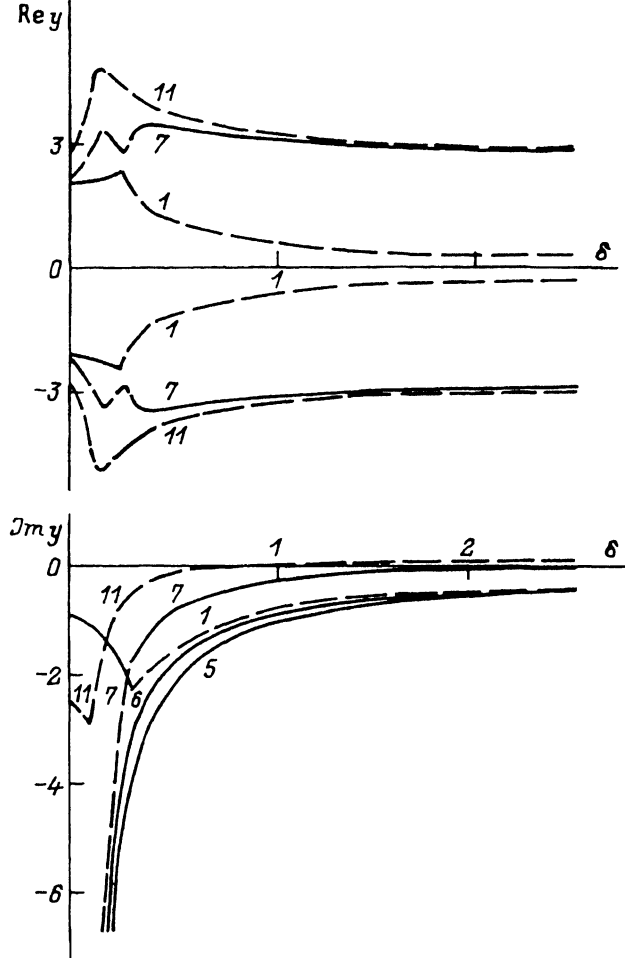


Рис. 8. Зависимости от безразмерного параметра δ вещественной и мнимой компонент обезразмеренной комплексной частоты движения жидкости y от величины параметра δ , при $\alpha^2 = 0.9$.

5. Как видно из приведенных рисунков, упругую природу имеют затухающие волновые движения 7, 8 и 12. Представляется целесообразным рассмотреть их по отдельности.

Для более ясного понимания физического смысла решения 7, напомним, что это решение проявляется лишь при учете упругих свойств жидкости (при $\delta \neq 0$) и, следовательно, имеет сугубо упругую природу. Асимптотическое решение дисперсионного уравнения (9) при $\delta y \gg 1$ и больших α^2 имеет вид

$$y \approx \pm \sqrt{\alpha^2} - i2\alpha^{-2}\delta^{-3/2},$$

именно так и ведет себя часть ветви 7, определенная на верхнем листе римановой поверхности. Таким образом, частоты ω затухающего волнового движения 7 пропорциональны ω_0 (см. (9)). Если пренебречь влиянием гравитационного поля и принять, что поверхность жидкости

не заряжена ($\kappa = 0$), то получим $\omega \sim k^{3/2}$. О возможности существования в жидкости упругих поверхностных волн такого типа сообщалось в [5]. Наличие электрического заряда на поверхности жидкости и учет влияния гравитационного поля изменяет указанную дисперсионную зависимость. Но тем не менее можно однозначно идентифицировать ветвь 7 как ветвь затухающих поверхностных упругих волн.

Как было отмечено выше, решение 8 входит составной частью в решение 12 и все сказанное ниже о ветви 12 может быть отнесено с некоторыми оговорками к ветви 8.

Идентификацию решения 12 провести сложнее, чем решения 7, поскольку ветвь 12 порождается объединением трех разнотипных движений: чисто капиллярных затухающих волн 1, капиллярно-упругих затухающих волн 4, выходящих с нижнего листа римановой поверхности на верхний только при достаточно большом значении параметра упругости δ (при $\delta \approx 0.25$), и ветви чисто упругих затухающих волн 8. Однако примем во внимание, что окончательное формирование ветви 12 происходит при большом δ (при $\delta \approx 0.5$) и безразмерная частота волнового движения 12 весьма слабо зависит от параметра α^2 . Учтем также, что ветвь 12 определяется как при положительных, так и при отрицательных значениях параметра α^2 , что указывает на ее существенно упругую природу, так как периодические капиллярные движения при $\alpha^2 < 0$ не существуют.

При $\alpha^2 \sim 0$ и не очень малых δ можно найти асимптотическое решение дисперсионного уравнения (9) в виде

$$y \approx \pm \frac{1}{2\delta} \sqrt{3.64\delta - 1} - i \frac{1}{2\delta}. \quad (10)$$

Решением такого типа можно удовлетворительно аппроксимировать ветвь 12 при $|\alpha^2| \ll 1$. Несложно видеть, что декремент затухания волн этого типа не зависит от вязкости жидкости и определяется лишь ее упругими свойствами.

Дисперсионная зависимость $\omega = \omega(k)$ для ветви 12 (согласно рис. 5, 6) имеет вид

$$\omega \approx \pm \frac{1}{2\tau} \sqrt{3.64\tau\nu_0 k^2 - 1}, \quad (11)$$

т.е. в соответствии с вышесказанным частота волн данной ветви весьма слабо зависит от лапласовского, электрического и гравитационного давлений на свободную поверхность жидкости.

Соотношение (11) при $\delta > 2$ (когда можно пренебречь единицей по сравнению с первым слагаемым под радикалом) можно переписать в виде

$$\omega \approx \pm k(0.91\nu_0/\tau)^{1/2}. \quad (12)$$

В (12) множитель при волновом числе определяет скорость волн этого типа, как групповую, так и фазовую. По порядку величины эта скорость невелика: например, для воды она будет ≈ 3 см/с. Несложно также видеть, что волны ветви 12 не обладают дисперсией. Это означает возможность существования солитонных решений, построенных из волн ветви 12: волновой пакет, составленный из таких волн, не будет подвержен расплыванию. В экспериментах по исследованию

неустойчивости заряженной поверхности жидкости [11] наблюдались подобные образования солитонного типа, двигавшиеся по поверхности воды с характерными скоростями ~ 1 см/с. Интересно, что, согласно рис. 5, 6, решения такого типа могут существовать как при $\alpha^2 < 0$, так и при $\alpha^2 > 0$, что также согласуется с данными [11].

Несложно видеть, что вещественная часть этой ветви дисперсионного уравнения с точностью до численных коэффициентов совпадает (изоморфна) с дисперсионным соотношением для акустических фононов. Следовательно, волны, описываемые соотношением (10), можно интерпретировать как поперечные упругие волны в упругой жидкости, распространяющиеся со скоростью $V = (0.91\nu_0/\tau)^{1/2}$ и затухающие за характерное время $\sim \tau$.

6. Из рис. 1–8 можно видеть, что область значений параметра α^2 , характеризующего внешние силы, приводящие к возникновению волнового движения жидкости, в которой возможно существование капиллярно-гравитационных волн, зависит от параметра упругости δ . Так, при $\delta = 0$ область существования таких волн ограничена лишь слева абсциссой точки ветвления решений 1–3. Положение этой точки при отсутствии влияния упругих свойств жидкости (при $\delta = 0$) определяется вязкостью жидкости, которая ограничивает минимально возможную длину капиллярной волны λ , существование которой не демпфируется вязкостью [12]. Например, в воде при $\delta = 0$ минимальная длина капиллярной волны $\lambda \approx 50.5$ нм. При $\delta \neq 0$ с увеличением влияния упругих свойств жидкости при изменении δ от 0 до ≈ 0.5 положение абсциссы точки ветвления решений 1–3 смещается в сторону увеличения α^2 примерно в два раза, что означает пропорциональное увеличение минимально возможной длины волны. При $\delta > 0.5$ капиллярное волновое движение в чистом виде, как отмечалось выше, исчезает, ветвь капиллярных волн замыкается на фоновую ветвь (на ветвь упругих волн).

При $\delta \neq 0$ область значений параметра α^2 , в которой существует капиллярное волновое движение, ограничена и справа. Согласно рис. 3–8, в зависимости от величины параметра упругости δ при некотором значении параметра α^2 ветвь капиллярных волн уходит на нижний лист римановой поверхности, а вместо нее с нижнего листа на верхний при больших частотах выходит фоновая ветвь (ветвь упругих волн). С увеличением δ положение точки ухода ветви капиллярных волн с верхнего листа римановой поверхности на нижний смещается к началу координат.

Таким образом, область существования капиллярного волнового движения в вязко-упругой жидкости по мере увеличения влияния упругих свойств жидкости (по мере увеличения δ от 0 до ≈ 0.5) уменьшается. При $\delta > 0.5$ капиллярного волнового движения в жидкости вообще не существует.

7. Из проведенных расчетов (см. также рис. 1–7) следует, что учет упругих свойств жидкости в том диапазоне значений параметра упругости δ , где имеет смысл говорить о неустойчивости Тонкса–Френкеля, практически не сказывается на критических условиях ее реализации и на инкременте этой неустойчивости (определенном частью ветви 2 при $\alpha^2 < 0$). Несложно, однако, видеть, что при достаточно большом δ меняется физический механизм самой неустойчивости.

Начиная с $\delta \approx 0.5$, ветвь 2 становится продолжением ветви аperiодических затухающих упругих движений жидкости 6, т.е. при достаточно большой упругости жидкости, когда капиллярные волны на ее поверхности уже не возникают, неустойчивость заряженной поверхности происходит за счет экспоненциального нарастания амплитуды аperiодических упругих движений. В этом смысле можно говорить о новом виде неустойчивости заряженной поверхности — неустойчивости поверхностных волн в упругой среде с заряженной поверхностью. Феноменологический факт неустойчивости сильно заряженной поверхности расплавленного сургуча, упоминаемый в [13], по-видимому, может служить экспериментальной иллюстрацией возможности такой неустойчивости.

Интересно, что при $\delta \geq 0.5$ в области $\alpha^2 < 0$, где происходит реализация неустойчивости заряженной поверхности упругой жидкости, возможно существование движений двух типов: аperiодически экспоненциально нарастающих (согласно решению 2) и периодически затухающих (согласно решению 12). Это приведет на финальной стадии неустойчивости (на стадии формирования эмиттирующих выступов, с вершин которых будет идти сброс избыточного заряда) к суперпозиции движений двух типов: аperiодически экспоненциально нарастающих, согласно решению 2, и периодически затухающих, согласно решению 12, что вызовет изменения (по сравнению с относительно хорошо изученными механизмами реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля [14,15]) в механизмах сброса лишнего заряда поверхностью жидкости и возвращения системы к равновесному состоянию.

8. Из выше изложенного следует, что внешние мелкомасштабные силовые воздействия на поверхность жидкости на временных интервалах Δt порядка, либо меньше характерного времени релаксации упругих напряжений в жидкости τ , приводят к существенному искажению типичной ее гидродинамической реакции, обычно проявляющейся в возникновении капиллярного волнового движения: если характерное время релаксации упругих напряжений в жидкости τ таково, что для данного волнового числа выполняется соотношение $\tau \geq 0.3\nu_0^{-1}k^{-2}$, то капиллярное волновое движение вообще не возникает, а диссипация в жидкости энергии внешнего воздействия осуществляется путем генерирования двух ветвей затухающих упругих волн с различными законами дисперсии, существующими в различных диапазонах изменения физических параметров, характеризующих систему, а также двух ветвей аperiодически затухающих упругих движений.

При $0 < \tau < 0.3\nu_0^{-1}k^{-2}$ кроме чисто упругих затухающих аperiодических и периодических движений возникают затухающие капиллярное и упруго-капиллярное (порождаемое совместным влиянием капиллярных и упругих характеристик жидкости) волновые движения; при $0.252\nu_0^{-1}k^{-2} \leq \tau \leq \nu_0^{-1}k^{-2}$ существует ветвь затухающих упругих волн, не подверженных дисперсии, из которых возможно формирование солитонных решений.

На критические условия реализации и на инкремент неустойчивости Тонкса-Френкеля (если на поверхности жидкости имеется достаточно большой нескомпенсированный электрический заряд) упругие свойства жидкости не оказывают заметного влияния, но сам механизм

развития неустойчивости заряженной поверхности упругой жидкости теперь связывается не с эволюцией неустойчивых в сильном приповерхностном электрическом поле капиллярных волн, как это имеет место в ситуации, когда упругими свойствами жидкости можно пренебречь, но с экспоненциальным ростом амплитуды аperiодически изменяющихся упругих движений жидкости; при этом в том же диапазоне физических параметров системы в жидкости существуют и затухающие периодические упругие волны. В связи с этим можно говорить о новом виде неустойчивости — неустойчивости заряженной поверхности упругой среды.

Список литературы

- [1] Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1944. 623 с.
- [3] Бадмаев Б.Б., Лайдабон Ч.С., Дерягин Б.В., Базарон У.В. // ДАН СССР. 1992. Т. 322, № 2. С. 307–311.
- [4] Быковский Ю.А., Маныкин Э.А., Полуэктов П.П. и др. // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 11. С. 2211–2213.
- [5] Тежеро С.Ф., Ваус М. // Molecular Phys. 1985. Vol. 54. N 6. P. 1307–1324.
- [6] Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 8. С. 60–64.
- [7] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
- [8] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [9] Левачова Г.А., Маныкин Э.А., Полуэктов П.П. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 17–22.
- [10] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
- [11] Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryayeva S.O. // J. Sci. Explor. 1991. Vol. 5. N 2. P. 163–190.
- [12] Антонюк П.Н. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. № 6. С. 1324–1328.
- [13] Zeleny J. // Phys. Rev. 1917. Vol. 10. N 1. P. 1–6.
- [14] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 12–21.
- [15] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // МЖГ. 1994. № 4. С. 3–22.