

01;04

## БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЯВЛЕНИЯ КОНТРАКЦИИ В ИНЕРТНЫХ ГАЗАХ I. БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНОГО РАЗРЯДА

© Ю.Б.Голубовский, В.О.Некучаев, Е.Б.Пелюхова

Санкт-Петербургский государственный университет  
Научно-исследовательский институт физики,  
198904 Санкт-Петербург, Россия  
(Поступило в Редакцию 18 июня 1995 г.)

Проведен бифуркационный анализ перехода стационарного разряда из диффузного состояния в контрагированное. Показано, что такие экспериментально наблюдаемые свойства эффекта контракции, как скачкообразность и гистерезис, исследуемые бифуркации обнаруживают только при учете влияния межэлектронных столкновений на скорость ионизации. В пренебрежении этим влиянием неоднородный разогрев газа порождает мягкую транскритическую бифуркацию, сопровождающуюся плавным изменением внутренних параметров плазмы. Определяющее влияние на характер бифуркации оказывает вид зависимости отношения скоростей ионизации и рекомбинации от концентрации электронов при заданном продольном поле и электронной температуре. При учете межэлектронных столкновений эта функция имеет минимум при концентрациях  $\approx 10^{11} \text{ см}^{-3}$ . Немонотонность этой зависимости порождает Z-образный участок бифуркационной диаграммы, отвечающий двум жестким бифуркациям типа седло-узел и наличию гистерезиса.

### Введение

Исследованию явления скачкообразной контракции разряда в инертных газах при давлениях в десятки и сотни тор (стягиванию разряда в тонкий шнур вблизи оси при достижении критических значений давления и тока) посвящено большое число работ. Большинство авторов связывало контракцию разряда в той или иной мере с неоднородным разогревом нейтрального газа [1-7]. Действительно, с ростом давления и тока увеличивается мощность, вкладываемая в разряд, что приводит к заметным градиентам температуры нейтрального газа, перераспределению нейтралов по радиусу и к радиальному спаду частоты ионизации вследствие экспоненциальной зависимости от приведенного поля  $E/N$  ( $E$  — продольное поле,  $N$  — плотность нейтралов).

Неоднородный разогрев газа в принципе может приводить к возрастанию скорости объемных потерь в радиальном направлении [1] (например, вследствие возможной диссоциации молекулярных ионов при высоких температурах в приосевой зоне разряда), что также ведет к контракции. Однако, как показали эксперименты [8], для неона и аргона температуры в шнуре не настолько высоки, чтобы диссоциация молекулярных ионов играла бы заметную роль.

С другой стороны, к радиальному спаду частоты ионизации может привести обеднение функции распределения электронов по энергии в радиальном направлении вследствие спада степени ионизации  $n/N$  ( $n$  — плотность электронов). Сложная нелинейная зависимость частоты ионизации от степени ионизации плазмы вызвана конкуренцией электрон-атомных и межэлектронных столкновений в формировании функции распределения [9].

Эти причины радиального спада частоты ионизации проявляются в той области давлений и токов, при которых происходит контракция разряда, и действуют одновременно. При достаточно высоких давлениях гибель заряженных частиц обусловлена главным образом объемной рекомбинацией, что приводит к образованию токового шнура, радиус которого несколько превосходит радиус зоны ионизации (вследствие амбиполярной диффузии заряженные частицы успевают продиффундировать из зоны ионизации на расстояние  $R^* \approx \sqrt{D_a \tau_r}$ ,  $D_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии,  $\tau_r$  — время рекомбинации).

Целью настоящей работы является выяснение роли различных физических факторов в формировании специфических свойств явления контракции: порогового характера по внешним параметрам (давлению и току), скачкообразного изменения внутренних параметров (электрического поля, концентрации электронов, площади токового шнура и т. д.), зависимость пороговых значений тока от направления его изменения (гистерезис).

В предыдущей работе [10] был начат бифуркационный анализ эффекта скачкообразной контракции, который проводился в пренебрежении неоднородным разогревом газа. Было показано, что в фазовом пространстве уравнения баланса заряженных частиц ( $n$ ,  $dn/dr$ ;  $r$  — текущая радиальная координата) при понижении величины электронной температуры  $T$  (управляющего параметра бифуркации) возникает новое устойчивое состояние равновесия, граница области притяжения которого — сепаратриса, входящая в начало координат фазовой плоскости, отвечает узкому поперечному распределению плотности электронов, т. е. контрагированному состоянию разряда. Вследствие того что с ростом давления температура электронов на оси спадает, имеется критическое давление, начиная с которого может реализоваться контрагированное состояние.

В настоящей работе прослеживается роль двух факторов — неоднородного разогрева газа и влияния межэлектронных столкновений на формирование функции распределения электронов — на тип возникающей стационарной бифуркации.

В работах [8, 11] на примере Ag и Ne исследованы стационарные нестратифицированные (т. е. не зависящие от времени и продольной ко-

ординаты) решения замкнутой системы уравнений, включающей уравнения баланса заряженных частиц, баланса энергии электронов и нейтралов, уравнение теплопроводности атомов, описывающее неоднородный разогрев инертного газа электрическим током, уравнение состояния газа и уравнение для тока. В пренебрежении межэлектронными столкновениями такие решения демонстрируют плавную однозначную зависимость от внешних параметров — давления в трубке и тока в цепи разряда. При заданном давлении увеличение тока сопровождалось плавным сокращением площади токового шнура и ростом концентрации электронов на оси разряда, т. е. правильно описывало тенденцию экспериментально наблюдаемых зависимостей этих параметров, но не их скачкообразный характер.

При учете влияния межэлектронных столкновений на скорость ионизации, зависимость внутренних параметров плазмы от тока при достаточно высоком давлении вблизи критического значения тока состояла из трех ветвей, крайние из которых отвечали диффузионному и контрагированному состояниям разряда. Точки их слияния со средней (неустойчивой) ветвью стационарного решения отвечают жестким стационарным бифуркациям типа седло-узел, в результате которых разряд переходит из диффузного состояния в контрагированное (при последовательном увеличении тока) либо, наоборот, из контрагированного состояния в диффузионное (при уменьшении тока). Таким образом, уже в рамках стационарной модели находят истолкование пороговый характер и скачкообразность эффекта контракции, а также гистерезис критического тока. Существенно, что характерные  $S$ - и  $Z$ -образные зависимости стационарного решения от тока (порождающие указанные специфические свойства исследуемого явления) имеют место как при учете неоднородного разогрева газа, так и без такового. Влияние разогрева приводит лишь к количественному изменению параметров (уменьшению критического тока, увеличению наклона вольт-амперной характеристики и пр.), однако само по себе не способно вызвать резкие качественные изменения их поведения.

В настоящей работе показано, что как без учета, так и при учете неоднородного разогрева газа бифуркационные возможности стационарного разряда определяются уравнением баланса заряженных частиц, в котором параметром порядка является концентрация электронов  $n$ , а управляющим параметром — величина продольного электрического поля  $E$ . Бифуркация возникновения нового устойчивого состояния равновесия на фазовой плоскости  $(n, dn/dr)$  происходит при достаточно малом значении поля  $E_c$ , реализация которого накладывает определенные пороговые условия на давление и ток. Если давление мало ( $p < 50$  Тор), то критическое значение  $E_c$  недостижимо: такое поле слишком слабо, чтобы поддерживать разряд в газе даже при сильном токе. Таким образом, возникает порог по величине давления. По его превышении ( $p > 50$  Тор) критическое поле  $E_c$  достигается при достаточно сильном токе.

При заданном давлении тип возникающей стационарной бифуркации качественно различен при учете влияния межэлектронных столкновений на скорость ионизации и без учета этого влияния. Решающее значение имеет тот факт, что при наличии межэлектронных столкновений отношение скоростей ионизации и рекомбинации  $Z(n)/\Gamma(n)$  является немонокотонной функцией концентрации электронов  $n$ , причем ее

минимум лежит в диапазоне значений  $n$ , сравнимом (по порядку величины) с диапазоном значений концентрации электронов на оси диффузного разряда. Немонотонность зависимости  $Z(n)/\Gamma(n)$  приводит к  $Z$ -образной бифуркационной диаграмме. Такой диаграмме отвечают две жесткие бифуркации типа седло-узел и гистерезис критических значений управляющего параметра — специфические свойства скачкообразной контракции.

В пренебрежении межэлектронными столкновениями наличие неоднородного разогрева газа порождает мягкую транскритическую стационарную бифуркацию при понижении величины поля  $E$ . Таким образом, бифуркационный анализ эффекта скачкообразной контракции в инертных газах (за исключением гелия) устанавливает приоритетное влияние межэлектронных столкновений на скачкообразный характер этого явления.

### Постановка задачи

Исследование поведения разряда будем проводить на основе замкнутой системы уравнений, состоящей из уравнения баланса заряженных частиц, баланса энергии электронов и нейтралов, уравнения состояния газа и тока через разряд. Предполагается, что разогрев газа приводит к перераспределению нейтральных атомов по радиусу трубки (балластные объемы отсутствуют). Для стационарного цилиндрического разряда соответствующая система уравнений с традиционными граничными условиями имеет вид

$$\frac{1}{R^2} \nabla D_a(T, N) \nabla n + Z(T, N, n) - \Gamma(T, N, n) = 0; \quad (1)$$

$$\rho = \frac{r}{R}; \quad \left. \frac{dn}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0; \quad n(1) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\theta_R}{R^2} \nabla \bar{w}(\theta_R \vartheta) \nabla \vartheta + jE = 0, \quad (3)$$

$$\vartheta = \frac{\theta}{\theta_R}; \quad \left. \frac{d\vartheta}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0; \quad \vartheta(1) = 1; \quad (4)$$

$$j = enb_e(T, N) E; \quad (5)$$

$$p = kN\theta = p_c/\tau; \quad (6)$$

$$\tau = \int_0^1 \frac{d\rho^2}{\vartheta(\rho)}; \quad (7)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{m}{M}} eE\lambda = 21.44 \frac{E}{p_c} \frac{\theta_R}{\theta_w} \tau \vartheta; \quad (8)$$

$$i = j(0) \pi R^2 \mu; \quad \mu = \int_0^1 \frac{j(\rho)}{j(0)} d\rho^2. \quad (9)$$

Уравнение (1) с граничными условиями (2) описывает процесс рождения и гибели электронов в результате ионизации  $Z$ , диффузии  $\nabla D_a \nabla n$  и рекомбинации  $\Gamma$ . Уравнение теплопроводности (3) с граничными условиями (4) моделирует процесс неоднородного разогрева газа ( $\theta$  — температура нейтральной компоненты) электрическим током плотностью  $j$  в поле напряженностью  $E$ . При этом предполагается, что при достаточно высоких давлениях (десятки и сотни тор) вся мощность, вкладываемая в разряд ( $jE$ ), в результате упругих столкновений электронов с нейтралами идет на нагрев газа и за счет теплопроводности ( $\bar{w}$  — коэффициент теплопроводности) отводится к стенкам трубки ( $\theta_R$  — температура стенок разрядной трубки). Уравнение состояния (6) связывает давление при включенном разряде  $p$  (“горячее давление”), концентрацию нейтралов  $N$  и температуру  $\theta$  с давлением  $p_c$  (“холодным давлением”), при котором проводилось наполнение трубки газом без разряда при температуре окружающей среды  $\theta_w$ . Формфактор  $\tau$ , учитывающий перераспределение атомов по радиусу разрядной трубки, получен из условия сохранения полного числа частиц в объеме трубки. Он достигает максимального значения ( $\tau = 1$ ) при однородном распределении температуры  $\vartheta(\rho) = 1$ . При наличии неоднородного разогрева газа  $\vartheta \geq 1$ ,  $\tau < 1$ ,  $p > p_c$ , — “горячее давление” оказывается больше, чем “холодное”. Уравнение баланса энергии электронов (8) определяет локальную связь средней энергии (температуры  $T$ ) электронов с приведенным полем  $E/N$  ( $M$  и  $m$  массы атомов и электронов). В предположении постоянства длины свободного пробега электронов  $\lambda$  (что приблизительно справедливо для неона) численный коэффициент 21.44 позволяет получить значение  $T$  в эВ, если  $E$  выражено в В/см,  $p_c$  — в Тор и  $\theta_w = 300$  К. В уравнении для тока разряда (9) формфактор  $\mu$  характеризует относительную площадь токового шнура, а плотность тока на оси разряда  $j(0)$  определяется формулой (5) при  $\rho = 0$  ( $e$ ,  $b_e$  — соответственно заряд и подвижность электронов).

Система уравнений (1)–(9) рассматривалась при заданных параметрах  $p_c$  и  $\theta_R$  — исходных давлении и температуре газа на стенке. Метод самосогласованной задачи, разработанный в [8,11], позволяет рассчитать зависимость внутренних параметров разряда от величины тока  $i$  опосредованным параметрическим способом: при заданном поле  $E$  находится решение краевой задачи (1)–(8), а затем посредством уравнения (9) определяется величина тока, отвечающая полученному решению. В такой постановке величина продольного электрического поля  $E$  выступает как управляющий параметр системы (1)–(8).

Бифуркационный анализ системы (1)–(8) сводится к нахождению критического значения параметра  $E = E_c$ , при котором происходит качественная трансформация ее решения, и к определению характера возникающих бифуркаций.

### Методика решения бифуркационной задачи

В системе (1)–(8) можно исключить атомные переменные  $\theta$  и  $N$ . Из уравнения локального баланса энергии (8) имеем

$$T/T_R = \theta/\theta_R = \vartheta, \quad (10)$$

где  $T_R$  — значение электронной температуры  $T$  на стенке разрядной трубки.

Полагая температуру стенки трубки  $\theta_R$  в процессе горения разряда неизменной и равной  $\theta_w = 300$  К, можно выразить электронную температуру на стенке  $T_R$  в виде

$$T_R = \bar{T}\tau, \quad (11)$$

где

$$\bar{T} \equiv \frac{21.44}{p_c} E, \quad (12)$$

$\bar{T}$  — температура электронов при заданном поле  $E$  и исходном “холодном” давлении  $p_c$  в отсутствие неоднородного разогрева ( $\vartheta = \tau = 1$ ).

Из формул (10)–(12) для формфактора  $\tau$  (7) следуют равенства

$$\tau = T_R \int_0^1 \frac{d\rho^2}{T(\rho)} = T_R/\bar{T}. \quad (13)$$

Концентрация атомов  $N$ , согласно (6), (8), выражается через переменные  $T$ ,  $E$  следующим образом:

$$N = \frac{p}{k\theta} = 2.06 \cdot 10^{20} \frac{E}{\theta_R T} \doteq 0.69 \cdot 10^{18} \frac{E}{T}. \quad (14)$$

Здесь  $N$  в  $\text{см}^{-3}$  при  $T$  в эВ,  $E$  в В/см,  $\theta_R = 300$  К. Подставляя формулы (10)–(14) в уравнения (1)–(5), получаем замкнутую систему уравнений относительно электронных переменных  $n$ ,  $T$

$$\frac{1}{R^2} \nabla D_a(E, t) \nabla n + Z(n, T, E) - \Gamma(n) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\theta_R}{R^2} \nabla \bar{w}(\theta_R \vartheta) \nabla \vartheta + enb_e(T, E) E^2 = 0, \quad (16)$$

$$T = T_R \vartheta. \quad (17)$$

Решение системы (15)–(17) должно удовлетворять граничным условиям (2)–(4) и уравнению (13) (по сути первому интегралу системы), которые при заданном поле  $E$  и параметрах  $p_c$ ,  $\theta_R$  определяют значения переменных  $n$ ,  $T$  на оси и на стенке трубки:  $(n_0, T_0)$  и  $(0, T_R)$  соответственно.

Будем анализировать решения системы уравнений (15)–(17) в четырехмерном фазовом пространстве  $(n, dn/d\rho, \vartheta, d\vartheta/d\rho)$ . Эту систему можно трактовать как модель двух связанных осцилляторов, в которой роль времени играет радиальная координата  $\rho = r/R$ ,

$$\frac{d^2 n}{d\rho^2} + \frac{dn}{d\rho} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{d \ln D_a}{d\rho} \right) + \frac{R^2}{D_a} (Z - \Gamma) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\rho^2} + \frac{d\vartheta}{d\rho} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{d \ln \bar{w}(\vartheta)}{d\rho} \right) + \frac{R^2}{\bar{w}(\vartheta)} eb_e n E^2 = 0. \quad (19)$$

В такой трактовке величины

$$\frac{R^2}{D_a} (Z - \Gamma) \equiv -\frac{\partial V_1(n, T, E)}{\partial n}, \quad (20)$$

$$\frac{R^2 e b_e n E^2}{\bar{w}(\vartheta)} = -\frac{\partial V_2(n, T, E)}{\partial \vartheta} \quad (21)$$

выступают как потенциальные силы, а слагаемые, пропорциональные скоростям  $dn/d\rho$ ,  $d\vartheta/d\rho$ , — как нелинейные нестационарные силы трения.

При изменении управляющего параметра  $E$  бифуркационная ситуация в системе (18), (19) возникает в критической точке  $E = E_c$ , в которой происходит качественная перестройка фазового портрета системы. В рамках стационарных бифуркаций такая перестройка обусловлена возникновением новых состояний равновесия связанных осцилляторов, т.е. возникновением новых корней действующих на них потенциальных сил [12]. Как видно из формул (20), (21), единственным источником новых корней может быть разность  $Z(n, T, E) - \Gamma(n)$ , которая при изменении  $E$  может порождать новые состояния равновесия на фазовой плоскости  $(n, dn/d\rho)$ . Таким образом, бифуркационные возможности стационарного разряда сосредоточены в уравнении баланса заряженных частиц (18) — “электронном осцилляторе” и зависят от характера нелинейности функции  $Z(n, T) - \Gamma(n)$ .

Стационарные точки (положения равновесия) осциллятора (18) определяются условиями  $d^2n/d\rho^2 = 0$ ,  $dn/d\rho = 0$ , в силу которых переменные  $n$ ,  $T$  в этих точках должны удовлетворять уравнению

$$Z(n, T, E) - \Gamma(n) = 0. \quad (22)$$

При заданном поле  $E$  соотношение (22) устанавливает зависимость между переменными  $T = T_l(n)$  в стационарных точках и потому называется уравнением локальной связи [13]. Кроме того, решение граничной задачи (18), (19), (2), (4), (13) при данном  $E$  определяет связь между переменными  $n$ ,  $T$ , отвечающими одному и тому же значению радиальной координаты  $\rho = r/R$

$$T(\rho) = T(\rho(n)) = T_s(n), \quad (23)$$

называемую уравнением состояния [13]. Подставляя ее в формулу (22), получаем уравнение для состояний равновесия электронного осциллятора (18), связанного с температурным осциллятором (19),

$$Z(n, T_s(n), E) - \Gamma(n) = 0. \quad (24)$$

Его решение дает зависимость положения равновесия  $(\bar{n}, 0)$  на фазовой плоскости  $(n, dn/dr)$  от величины поля  $E$

$$\bar{n} = \bar{n}(E). \quad (25)$$

Бифуркационные возможности системы (1)–(9) определяются возникновением новых ветвей функции (25) при изменении управляющего параметра  $E$ , в силу чего ее можно трактовать как бифуркационную диаграмму стационарного разряда.

Решения уравнения (24) при данном поле  $E$  можно представить графически как точки пересечения кривых локальной связи  $T_l(n)$  (22) и уравнения состояния (23)  $T_l(n) = T_s(n)$ . Бифуркационная ситуация, возникающая при критическом значении управляющего параметра  $E = E_c$ , характеризуется возникновением новых точек пересечения этих кривых.

Наиболее полно характер нелинейной зависимости скоростей ионизации  $Z$  и рекомбинации  $\Gamma$  от переменной  $n$  отражает модель, учитывающая межэлектронные столкновения и выход резонансного излучения за пределы разрядной трубки [14]. В настоящей работе использован упрощенный вариант такой модели [15] применительно к разряду в инертных газах (в [10] он же был использован для бифуркационного анализа уравнения (18) без учета неоднородного разогрева газа)

$$Z(n, T, E) = n\xi \frac{4}{\sqrt{\pi}} C(\gamma) \left( \nu_e + \frac{m}{M} \nu_a \right) \exp - \int_0^{U_1} \frac{(\nu_e + \frac{m}{M} \nu_a)}{\nu_E + \nu_e} dU, \quad (26)$$

$$\Gamma(n) = \alpha n^2 (1 - \xi), \quad (27)$$

$$\xi \approx \frac{W_i}{W_i + W_R}, \quad (28)$$

$$\gamma = \frac{m}{M} \frac{\nu_a(T)}{\nu_e(T)}. \quad (29)$$

Здесь  $U_1 = \varepsilon_1/kT$  ( $\varepsilon_1$  — первый потенциал возбуждения);  $\xi$  — фактор, описывающий выход резонансного излучения ( $W_i$  и  $W_R$  — вероятности ступенчатой ионизации и выхода резонансного излучения), а величина  $\gamma = \gamma(n, T, N)$  — влияние межэлектронных столкновений на скорость ионизации атомов. Частоты электрон-электронных и электрон-атомных столкновений ( $\nu_e$  и  $\nu_a$  соответственно) зависят от концентрации электронов  $n$  и атомов  $N$ , последняя может быть выражена через параметры  $E, T$  по формуле (14).

Для случая постоянной длины свободного пробега разность скоростей  $Z - \Gamma$  удобно представить в виде

$$Z - \Gamma = \Gamma \left( \frac{Z}{\Gamma} - 1 \right) = \alpha n^2 \left[ \xi_0 e^{-U_1^2/4} f(\gamma) - 1 \right], \quad (30)$$

где

$$\xi_0 = \frac{\xi}{\alpha(1 - \xi)n} = \text{const};$$

$$f(\gamma) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} C(\gamma) \nu_e (1 + \gamma U_1^2) \exp \left( \frac{U_1}{4\gamma} - \frac{4\gamma + 1}{8\gamma^2} \ln(1 + 2\gamma U_1) \right),$$

а отношение частот столкновений  $\gamma = \gamma(n, T, E)$  определяется формулами (29), (14).



Подставив выражение (30) в формулу (22), получаем, что начало координат фазовой плоскости электронного осциллятора  $n = 0$ ,  $dn/dr = 0$  является его стационарной точкой при любых значениях управляющего параметра  $E$ . Следовательно, прямая  $\bar{n}(E) = 0$  представляет собой одну из ветвей бифуркационной диаграммы (25). На другой ее ветви локальная связь переменных  $n$ ,  $T$  определяется уравнением

$$\frac{Z}{\Gamma} = \xi_0 e^{-U_1^2/4T^2} f(\gamma) = 1, \quad \gamma = \gamma(n, T, E). \quad (31)$$

Возникновение точек пересечения графиков функций  $T = T_l(n)$  и  $T = T_s(n)$ , определяемых уравнениями (31) и (23) соответственно, при изменении управляющего параметра  $E$  отвечает зарождению этой новой ветви бифуркационной диаграммы (25). Ее характер определяет тип происходящей в системе (18), (19) стационарной бифуркации. Необходимым условием жесткой бифуркации является немонотонность функции локальной связи [13,16].

### Расчет кривой локальной связи

Функцию  $T_l(n)$ , порождаемую уравнением локальной связи (31), можно построить как последовательность точек пересечения кривых

$$\Phi(n) = Z(n)/\Gamma(n), \quad (32)$$

вычисленных при данном поле  $E$  и различных значениях электронной температуры  $T$ , с прямой  $\Phi(n) = 1$ . Конкретные расчеты выполнены применительно к разряду в неоне. На рис. 1 в качестве примера приведен график функции  $\Phi(n, T)$  для  $E = 20$  В/см, точки пересечения дают искомые значения  $T_l(n)$ . Существенно, что функция  $\Phi(n)$  (32) немонотонна: при значениях  $n$  порядка  $10^{11}$  см<sup>-3</sup> она имеет минимум. Качественный вид этой зависимости при малых значениях  $n$  хорошо аппроксимируется функцией  $x^x$ , где  $x = 1/2\gamma \leq 1$  (см. (30)). Наличие минимума функции  $\Phi(n)$  (32) приводит к тому, что кривая локальной связи  $T_l(n)$  немонотонна: при  $n \approx 10^{11}$  см<sup>-3</sup> она имеет максимум (рис. 2, кривые 1, 2). Его величина  $T_{lm}$  в зависимости от управляющего параметра  $E$  представлена на рис. 3 кривой 1. На этом же рисунке кривая 2 изображает граничное значение  $T_l(0) \equiv T_{l0}$  как функцию поля  $E$ , которая определяется уравнением (31) в пределе при  $n \rightarrow 0$

$$\frac{Z}{\Gamma} \Big|_{n \rightarrow 0} = \xi_0 E^{-U_1^2/4} f(\gamma) \Big|_{\nu \rightarrow 0} = \xi_0 \frac{m}{M} \nu_a(E, T) e^{-U_1^2/4} = 1. \quad (33)$$

В пренебрежении межэлектронными столкновениями кривая локальной связи  $T_l(n)$  вырождается в прямую  $T_l(n) = T_{l0}$  (33), параллельную оси  $n$  (рис. 2, прямые I, II).

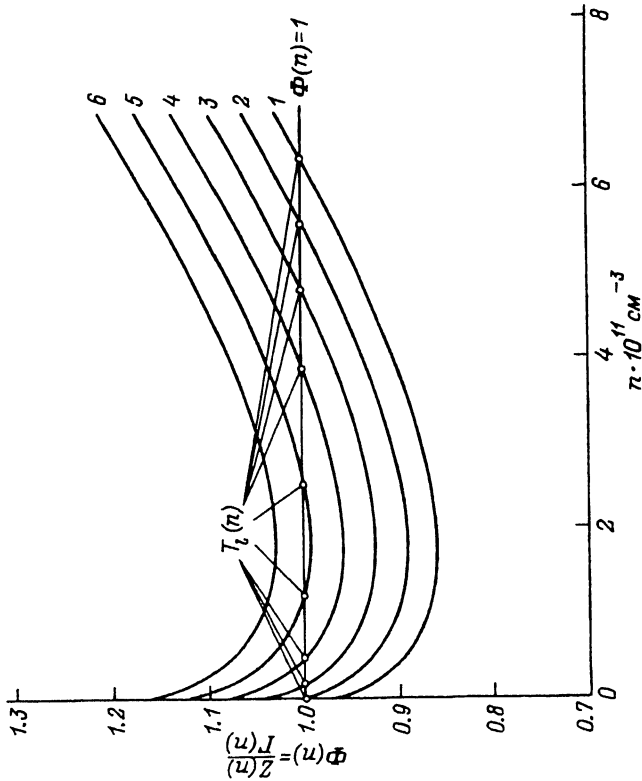


Рис. 1. Зависимость функций

$$\Phi(n, T)|_{E=\text{const}} = \frac{Z(n)}{\Gamma(n)} \Big|_{E, T}$$

от концентрации электронов  $n$  и температуры  $T$  для поля  $E = 20 \text{ В/см}$ . Точки пересечения кривых с прямой  $\Phi(n) = 1$  соответствуют значениям  $T_1(n)$ , (1-6) —  $T = 2.595 - 2.620 \text{ эВ}$ .

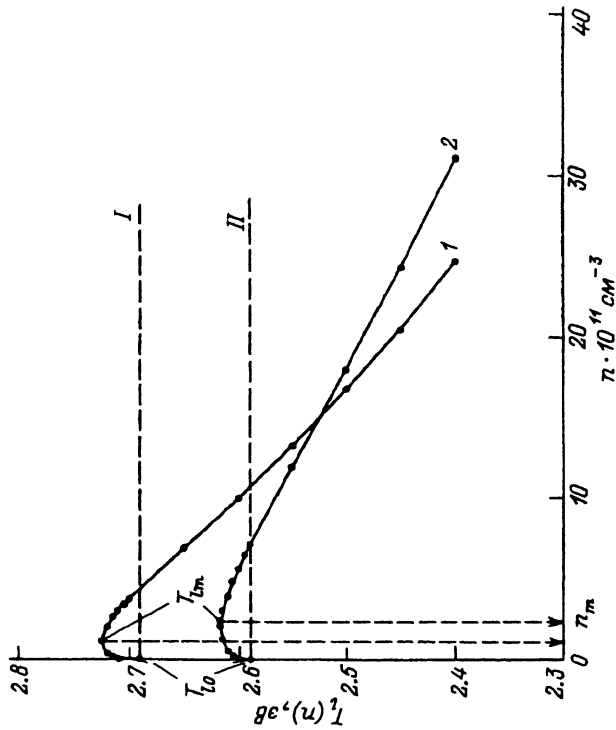


Рис. 2. Зависимость функции локальной связи  $T_1(n)$  при учете межэлектронных столкновений (I, 2) и в пренебрежении межэлектронными столкновениями (I, II). Расчеты выполнены для значений поля  $E = 10 \text{ В/см}$  (I, I) и  $E = 20 \text{ В/см}$  (2, II);  $T_{bm}$  — значение  $T_1$  в максимуме,  $T_{l0}$  — значение  $T_1$  при  $n = 0$ .

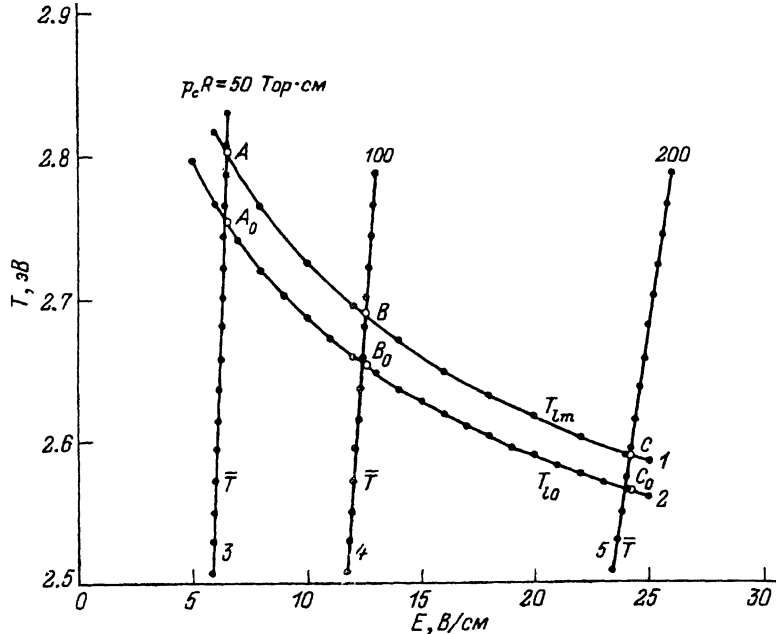


Рис. 3. Зависимость величин  $T_{lm}$  (1),  $T_{l0}$  (2) и  $\bar{T}$  (3 5) от напряженности поля  $E$ .  $p_c R$ , Top·см: 3 — 50, 4 — 100, 5 — 208.

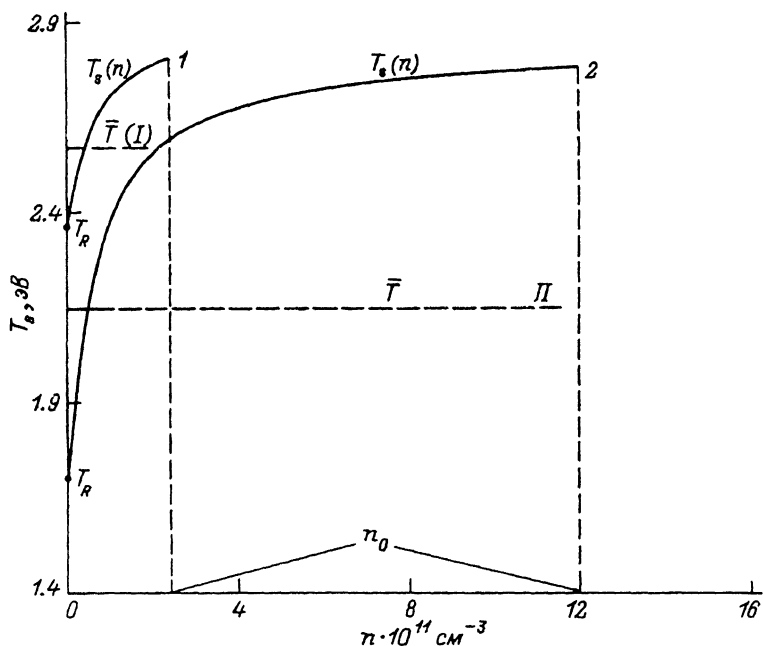


Рис. 4. Зависимость функции состояния  $T_s(n)$  при  $p_c R = 100 \text{ Top} \cdot \text{cm}$  для диффузного разряда ( $E = 12 \text{ В/см}$ ,  $n_0 = 2.42 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$  (1)) и контрагированного разряда ( $E = 10 \text{ В/см}$ ,  $n_0 = 12 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$  (2)).

$T_R$  — значение электронной температуры на стенке трубки, I и II — функции состояния в отсутствие неоднородного разогрева.

Функцию  $T_s(n)$ , отвечающую уравнению состояния (23), получим приближенно, аппроксимируя профиль неоднородного разогрева параболической функцией

$$T(\rho) = T_R \vartheta(\rho) = \bar{T} \tau [\vartheta_0 - (\vartheta_0 - 1)\rho^2], \quad (34)$$

где  $\vartheta_0 \equiv \vartheta(0)$  — значение относительной температуры  $\vartheta(\rho)$  (10) на оси разряда.

Величину  $\vartheta_0$  найдем из уравнения теплопроводности (19) при  $\rho = 0$

$$\vartheta_0 = 1 + \beta E^2 n_0. \quad (35)$$

Здесь  $n_0$  — концентрация электронов на оси разряда, а коэффициент  $\beta$  равен

$$\beta = \frac{eR^2 b_e}{4\bar{w}_0 \theta_R} \quad (36)$$

(для простоты положим  $\bar{w}(\vartheta) = \bar{w}_0 = \text{const}$ ).

Подставив равенства (34)–(36) в формулу (7) для формфактора  $\tau$ , получаем

$$\tau = \frac{\ln \vartheta_0}{\vartheta_0 - 1} = \frac{\ln(\beta E^2 n_0 + 1)}{\beta E^2 n_0} \quad (37)$$

при  $\beta E^2 n_0 \ll 1$ ,  $\tau \approx 1 - \beta E^2 n_0/2$ .

С учетом формул (35), (36) функция  $T(\rho)$  (34) принимает вид

$$T(\rho) = \bar{T} \frac{\ln(1 + \beta E^2 n_0)}{\beta E^2 n_0} \left[ 1 + \beta E^2 n_0 (1 - \rho^2) \right]. \quad (38)$$

Подставив ее в уравнение (18), найдем радиальное распределение концентрации электронов  $n(\rho)$  и ее значение на оси разряда  $n_0$  посредством решения самосогласованной задачи: при данном поле  $E$  подбираем (путем скакирования) величину  $n_0$  так, чтобы решение уравнения (18) удовлетворило граничному условию на стенке трубки. Методика решения такой задачи разработана в [14].

При данных параметрах  $p_c R$ ,  $E$  зависимость  $T_s(n)$  (23) определена на промежутке  $0 \leq n \leq n_0$ , где она монотонно возрастает от наименьшего значения

$$T_s(0) = T_R = \bar{T} \tau < \bar{T}$$

до наибольшего

$$T_s(n_0) = T_0 = \bar{T} \tau \vartheta_0 = \bar{T} \frac{\vartheta_0 \ln \vartheta_0}{\vartheta_0 - 1} > T.$$

На рис. 4 приведены зависимости  $T_s(n)$  для диффузного (кривая 1) и контрагированного (кривая 2) разрядов. В отсутствие неоднородного разогрева кривая  $T_s(n)$  (23) вырождается в отрезок горизонтальной прямой  $T_s(n) = \bar{T}$  (12) на интервале  $0 \leq n \leq n_0$  (рис. 4, прямые I, II).

В работе проанализированы бифуркационные диаграммы (25) в трех ситуациях, отражающих влияние различных физических факторов на природу скачкообразной контракции: 1) наличие неоднородного разогрева газа в отсутствие влияния межэлектронных столкновений на скорость ионизации; 2) учет межэлектронных столкновений в отсутствие неоднородного разогрева газа; 3) одновременный учет неоднородного разогрева газа и межэлектронных столкновений.

1. В пренебрежении межэлектронными столкновениями зарождение новой ветви бифуркационной диаграммы  $\bar{n}(E)$  (25) определяется возникновением точки пересечения монотонно возрастающей функции (23) с горизонтальной прямой  $T_l(n) = T_{l0}$  (33):  $T_s(n) = T_{l0}$ . Критическая ситуация имеет место при  $E = E_{c0}$ , когда пересечение возникает в точке  $n = 0$ , и определяется условием

$$T_R(E_{c0}) = T_{l0}(E_{c0}). \quad (39)$$

На рис. 3 точки  $A_0, B_0, C_0$  — критические точки, удовлетворяющие равенству (39) при  $p_c R = 50, 100$  и  $200$  Тор · см. Таким образом, в рассматриваемой ситуации новое состояние равновесия электронного осциллятора (18) возникает в начале координат фазовой плоскости  $(n, dn/d\rho)$ . При  $E < E_{c0}$  абсцисса точки пересечения  $T_s(n) = T_{l0}$  растет — новое положение равновесия электронного осциллятора (18) удаляется от начала координат фазовой плоскости. Такой характер возникновения нового состояния равновесия отвечает мягкой транскритической бифуркации [17]. Ее бифуркационная диаграмма (25) представлена на рис. 5 кривой 1. В критической точке  $E = E_{c0}$  состояние равновесия  $(n, dn/d\rho) = (0, 0)$  теряет устойчивость. При  $E < E_{c0}$  вблизи него возникает новое устойчивое состояние равновесия  $(\bar{n}, 0)$ . Одновременно на фазовой плоскости  $(n, dn/d\rho)$  появляется сепаратриса, ограничивающая область притяжения новой стационарной точки. Как показано в работе [10], это приводит к росту концентрации электронов на оси разряда и уменьшению площади токового шнура. Соответствующая трансформация потенциала  $U_1(n, T_s(n), E)$  (20) отвечает мягкому фазовому переходу второго рода [18]. Таким образом, в отсутствие межэлектронных столкновений бифуркационные возможности стационарного разряда ограничиваются плавными изменениями его внутренних параметров. Скачкообразная контракция в такой модели невозможна.

2. При учете влияния межэлектронных столкновений бифуркационная диаграмма  $\bar{n}(E)$  (25) определяется возникновением точек пересечения немонотонной кривой локальной связи  $T_l(n)$  (которая относится к так называемому  $\Lambda$ -типу [13]) с горизонтальной прямой  $T_s(n) = \bar{T}$  (12):  $T_l(n) = \bar{T}$ . Критическое значение управляющего параметра  $E = E_{cl}$  определяется условием

$$T_{lm}(E_{cl}) = \bar{T}(E_{cl}), \quad (40)$$

где  $T_{lm}$  — величина максимума функции  $T_l(n)$ .

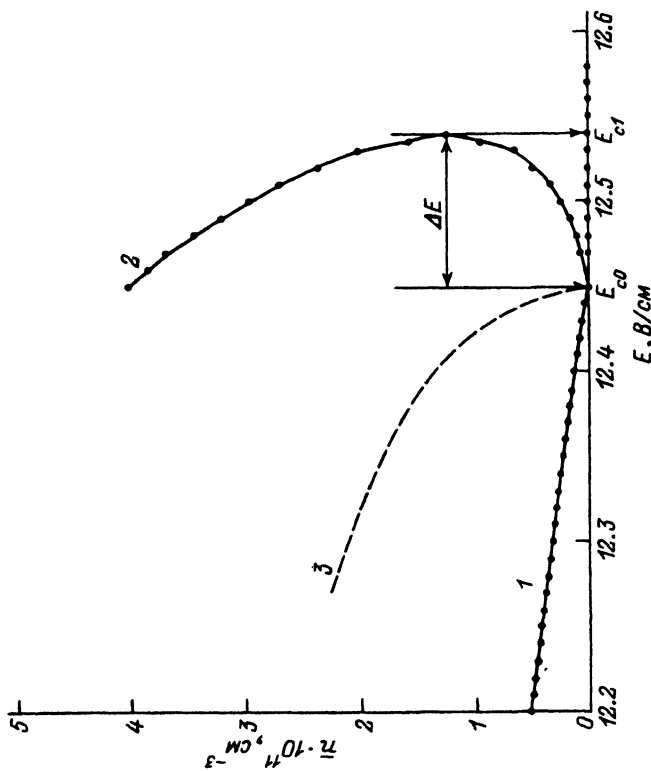


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы перехода стационарного разряда из диффузного состояния в контрагированное  $\bar{n}(E)$  (формула (25)).

1 — новая ветвь положения равновесия  $\bar{n}$  при наличии неоднородного разогрева газа в отсутствие межэлектронных столкновений, бифуркационная диаграмма отвечает мягкой транскритической бифуркации в точке  $E = E_{c0}$ ; 2 — новая ветвь положения равновесия  $\bar{n}$  при учете межэлектронных столкновений в пренебрежении неоднородным разогревом газа, бифуркационная диаграмма отвечает двум жестким бифуркациям типа седло-узел в точках  $E_{c0}$  и  $E_{c1}$  и наличие области гистерезиса шириной  $\Delta E$ ; 3 — качественный вид бифуркационной диаграммы при одновременном учете межэлектронных столкновений и неоднородного разогрева газа.

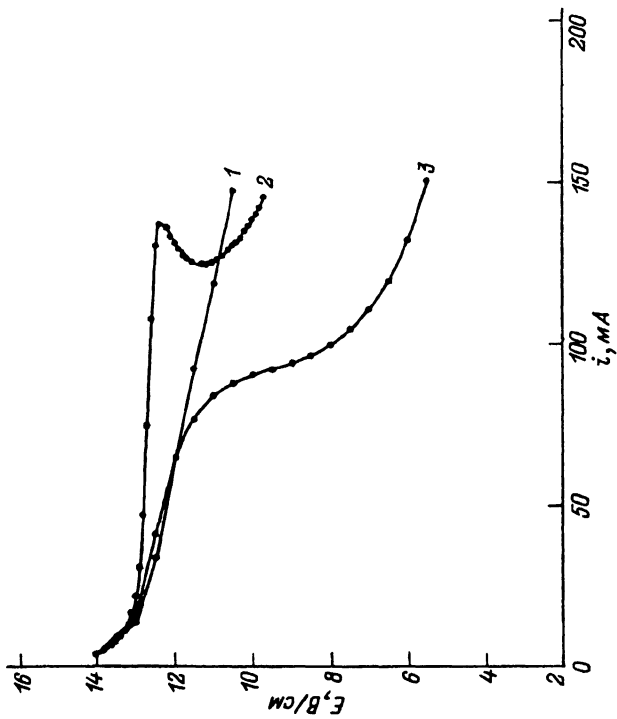


Рис. 6. Вольт-амперные характеристики стационарного разряда при давлении  $p_c R = 100 \text{ Torr} \cdot \text{см}$ .

1 — наличие неоднородного разогрева газа в пренебрежении межэлектронными столкновениями, 2 — наличие межэлектронных столкновений в пренебрежении неоднородным разогревом газа, 3 — одновременный учет обоих факторов. Неоднородный разогрев газа моделировался уравнениями (34)–(38).

При этом прямая  $T_s(n) = \bar{T}$  касается кривой  $T_l(n)$  в точке максимума последней. На рис. 3 точки  $A, B, C$  — критические точки, удовлетворяющие условию (40) при значениях давления  $p_c R = 50, 100$  и  $200$  Тор · см соответственно. При  $E < E_{cl}$  прямая  $T_s(n) = \bar{T}$  пересекает кривую  $T_l(n)$  в двух точках, если  $T_{l0} < \bar{T} < T_{lm}$ , и в одной точке, если  $\bar{T} < T_{l0}$ . Соответствующая бифуркационная диаграмма для давления  $p_c R = 100$  Тор · см изображена на рис. 5 кривой II. В левосторонней окрестности критической точки  $E = E_{cl}$  она состоит из трех ветвей. Точки слияния крайних (устойчивых) ветвей со средней (неустойчивой) ветвью отвечают жестким бифуркациям типа седло-узел. При противоположных направлениях изменения управляющего параметра  $E$  эти бифуркации происходят в различных точках (гистерезис).

Таким образом, при учете межэлектронных столкновений даже в отсутствие неоднородного разогрева газа бифуркации стационарного разряда имеют скачкообразный вид и характеризуются наличием гистерезиса, г.е. обладают специфическими свойствами эффекта скачкообразной контракции.

3. При учете как межэлектронных столкновений, так и неоднородного разогрева газа новая ветвь бифуркационной диаграммы (25) определяется пересечением двух кривых:  $T_l(n)$  и  $T_s(n)$ . Критическая ситуация возникает в тот момент, когда эти кривые касаются друг друга

$$T_l(n) = T_s(n), \quad dT_l(n)/dn = dT_s(n)/dn. \quad (41)$$

Критическая точка  $E = E_{c3}$ ,  $\bar{n} \neq 0$ , удовлетворяющая уравнениям (41), существует, поскольку на промежутке от  $n = 0$  до точки максимума производная функции локальной связи  $dT_l/dn$  изменяется от бесконечно большого значения (при  $n = 0$ ) до нуля (в точке экстремума), в то время как производная функции состояния  $dT_s/dn$  остается конечной. Таким образом, в критической ситуации величина  $\bar{n}$ , определяющая положение нового состояния равновесия электронного осциллятора (18), лежит внутри промежутка  $(0, n_m(E_{c3}))$ , где  $n_m(E_{c3})$  — абсцисса максимума функции локальной связи при  $E = E_{c3}$ , в то время как в случаях 1 и 2 новое состояние равновесия возникает соответственно на нижнем ( $\bar{n} = 0$ ) и верхнем ( $\bar{n} = n_m$ ) концах этого промежутка. Качественный вид бифуркационной диаграммы (25) для рассматриваемого случая представлен на рис. 4 кривой III, сравнивая которую с кривой II, видим, что неоднородный разогрев газа сглаживает, нивелирует Z-образный участок бифуркационной диаграммы. На рис. 6 приведены вольт-амперные характеристики стационарного разряда, полученные как решение самосогласованной задачи <sup>[8,14]</sup> при моделировании неоднородного разогрева газа уравнениями (34)–(38). Расчеты выполнены при последовательном учете анализируемых физических факторов — неоднородного разогрева газа и межэлектронных столкновений. Из рис. 4, 5 видно, что в рамках стационарной модели неоднородный разогрев газа “размывает”, сглаживает скачкообразный характер перехода разряда в контрагированное состояние, а не стимулирует его. В то же время, на наш взгляд, учет эффектов, связанных с температурной неоднородностью, необходим для правильного описания возникновения контрагированных страт, т.е. временной и продольной неоднородности газоразрядной плазмы.

### Список литературы

- [1] *Kenty C.* // *Phys. Rev.* 1962. Vol. 126. P. 1235.
  - [2] *Баранов В.Ю., Ульянов К.Н.* // *ЖТФ.* 1969. Т. 39. Вып. 1. С. 249–259.
  - [3] *Ульянов К.Н.* // *ЖТФ.* 1973. Т. 43. Вып. 1. С. 570.
  - [4] *Елецкий А.В., Смирнов Б.М.* // *ЖТФ.* 1970. Т. 40. С. 1632.
  - [5] *Елецкий А.В., Старостин А.Н.* // *Физика плазмы.* 1975. № 1. С. 684. Там же 1976. № 2. С. 336.
  - [6] *Разимов А.Т., Улинич Ф.Р.* // *ДАН СССР.* 1969. № 187. С. 72.
  - [7] *Елецкий А.В., Разимов А.Т.* // *Физика плазмы.* 1977. № 4. С. 122.
  - [8] *Голубовский Ю.Б., Зонненбург Р.* // *ЖТФ.* 1979. Т. 49. С. 259–302.
  - [9] *Каган Ю.М., Лягуценко Р.И.* // *Опт. и спектр.* 1964. Т. 17. С. 168. *ЖТФ.* 1964. Т. 34. С. 1873.
  - [10] *Голубовский Ю.Б., Некучаев В.О., Пелюхова Е.Б.* // *ЖТФ.* 1996. Т. 66. Вып. 7.
  - [11] *Голубовский Ю.Б., Зонненбург Р.* // *ЖТФ.* 1979. Т. 49. С. 754.
  - [12] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* *Теория колебаний.* М.: Физматгиз, 1959.
  - [13] *Кернер Б.С., Осипов В.В.* *Автосолитоны.* М.: Наука, 1991.
  - [14] *Голубовский Ю.Б., Лягуценко Р.И.* // *ЖТФ.* 1977. Т. 47. С. 1852.
  - [15] *Golubovsky Yu.B., Nekutchayev V.O.* // *Contr. Plasmaphys.* 1985. Vol. 25. N 3. P. 295.
  - [16] *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Ягню В.Г.* *Автоволновые процессы.* М.: Наука, 1987.
  - [17] *Grawford J.D.* // *Rev. Mod. Phys.* 1991. Vol. 63. N 7. P. 991.
  - [18] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* *Статистическая физика.*
-