Письма в ЖТФ, том 20, вып. 1 12 января 1994 г.

04;09

О СПЕКТРЕ ВОЛН ТРАЙВЕЛПИСА-ГОУЛДА В НЕОДНОРОДНОМ ЗАМАГНИЧЕННОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

Г.И.Загинайлов, А.В.Синюгин

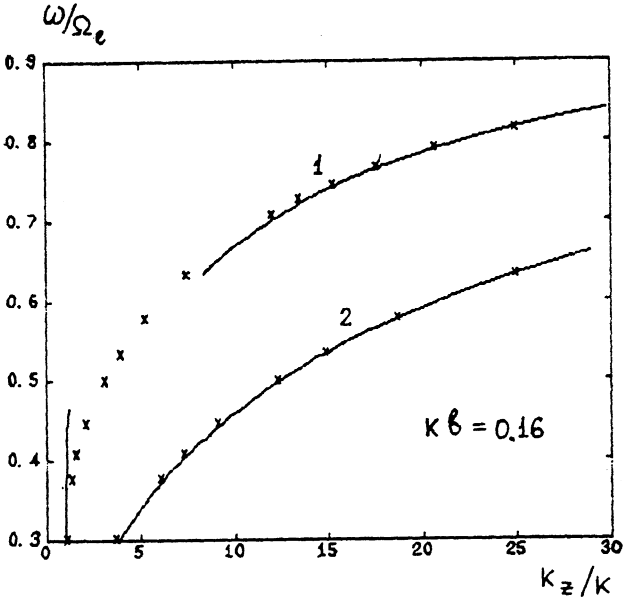
Знание дисперсионных свойств волн Трайвелписа-Гоулда (ВТГ) в радиально-неоднородных плазменных волноводах необходимо для корректной интерпретации многочисленных экспериментов по параметрическому рассеянию ВТГ на ионно-звуковых колебаниях [1], по транспортировке электронных пучков [2] и СВЧ энергии [3] через плазменный волновод, по конверсии ВТГ в другие типы волн [4] и т.д. Обычно спектры волн в плазменных волноводах (даже в случае достаточно простых модельных радиальных профилей [5]) описываются сложными трансцендентными уравнениями, анализ которых возможен лишь численными методами , что значительно осложняет сопоставление экспериментальных и теоретических результатов. В этой связи получение простых аналитических выражений для спектров ВТГ в немалой степени способствует прояснению физической картины более сложных эффектов с их участием.

В данном сообщении покажем, что для плазменного волновода с квадратичным радиальным профилем $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 + \frac{r^2}{b^2}$, $\varepsilon_0 = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}$, $\Omega_e^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$, n_0 — плотность плазмы на оси (который часто используется при моделировании реальных профилей [6]), находящегося в сильном продольном магнитном поле ($\omega_H^2 = \left(\frac{eH_0}{mc}\right)^2 \gg \Omega_e^2$), для спектра ВТГ можно получить аналитические выражения с большой степенью точности почти во всей области их существования.

В указанном случае уравнения Максвелла и гидродинамики в линейном приближении сводятся к одному уравнению для продольной составляющей электрического поля:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z(r)}{dr}\right) - k^2\varepsilon(r)E_z(r) = 0, \tag{1}$$

где $k = \sqrt{k_z^2 - k^2}$, $k = \omega/c$, для простоты ограничиваемся аксиальносимметричным случаем, фазовый множитель $\exp[-i(k_z z - \omega t)]$ опущен.



Дисперсионные кривые для первых двух радиальных мод ВТГ. *1* — основная мода, $n = 0$; *2* — первая мода, $n = 1$.

Переходя к новой переменной $x = \frac{kr^2}{b}$ и неизвестной функции $E_z(r) \equiv f(x) = \exp(-x/2)F(x)$ (1) можно свести в вырожденному гипергеометрическому уравнению. В результате регулярное на оси решение выражается через функцию Кумера $\Phi(a, 1, x)$ [7]:

$$E_z(r) = C_1 \exp(-x/2)\Phi(a, 1, x), \tag{2}$$

C_1 — константа, $a = \frac{1}{2} + \frac{kb\varepsilon_0}{4}$. Сшивая поля $E_z(r)$ и $H_\phi(r)$ на границе плазмы ($r = r_0 \equiv b\sqrt{1-\varepsilon_0}$) с вакуумными полями, получим дисперсионное уравнение для спектра ВТГ:

$$\left[\sqrt{1-\varepsilon_0} - \frac{K_0(x_1)}{K_1(x_1)}\right] \Phi(a, 1, x_0) = 2a\sqrt{1-\varepsilon_0}\Phi(a+1, 2, x_0), \tag{3}$$

где $x_1 = kb\sqrt{1-\varepsilon_0}$, $x_0 = kb(1-\varepsilon_0)$, $K_{0,1}(x)$ — функция Макдональда [7] порядка 0,1. Полагая $x_0 \gg 1$ и используя асимптотику функций Кумера, из (3), нетрудно получить:

$$k_n b|\varepsilon_0| = 2(2n+1) + O\left(x_0^{2n+1}(n!)^{-2}\exp(-x_0)\right), \tag{4}$$

$n = 0, 1, \ldots, \infty$.

Подставляя (4) в условие $x_0 \gg 1$, приходим в выводу, что полученное выражение для спектра справедливо в области $\frac{2(1-\varepsilon_0)(2n+1)}{|\varepsilon_0|} \gg 1$.

Экспоненциально малая величина остаточного члена по параметру x_0 обеспечивает высокую точность (4) в достаточно широком частотном интервале. Для основной моды ($n = 0$) погрешность, даваемая (4), не превышает 4% при $0 < |\varepsilon_0| < 1.5$, для высших радиальных гармоник, начиная с $n = 1$, погрешность менее 1% во всей области существования ВТГ. В потенциальном пределе ($k \to 0$) (4) совпадает с выражениями, полученными в [6]. При $|\varepsilon_0| \gg 1$ для основной моды из (3) можно также получить аналитическое выражение: $k_0 b = \frac{2}{\gamma\sqrt{1-\varepsilon_0}} \exp(\varepsilon_0/2)$, где γ — постоянная Эйлера [7].

Полученные аналитические результаты для спектра ВТГ подтверждаются численными расчетами. На рисунке приведены дисперсионные кривые для основной и первой мод, полученные на основе численного анализа (*3*) (крестики), а также исходя из (*4*) (сплошная линия). Существенные отличия наблюдаются лишь для основной моды в интервале частот $2 < |\varepsilon_0| < 5$, где для нее при необходимости нетрудно получить достаточно эффективную экстраполяционную формулу.

Таким образом, в случае замагниченного плазменного волновода с квадратичной радиальной неоднородностью для спектра ВТГ можно получить столь же простые формулы, как и в случае металлического волновода заполненного однородной замагниченной плазмой [8].

Авторы выражают благодарность А.Н.Кондратенко за полезную дискуссию.

Список литературы

[1] *Архипенко В.И., Будников В.Н., Гусаков Е.З.* и др. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. В. 4. С. 1221–1234.

[2] *Березин А.К., Киселев В.А., Файнберг Я.Б.* В кн.: Плазменная электроника. Киев: Наукова думка. 1989. С. 29–39.

[3] *Карбушев Н.И., Колосов Ю.А., Половков А.И.* и др. Физика плазмы. 1992. Т. 18 № 8. С. 1027–1038.

[4] *Cabral J.A.C.* // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1989. V. 31. N 2. P. 267–291.

[5] *Кондратенко А.Н., Куклин В.М.* Основы плазменной электроники. М.: Энергоатомиздат, 1988. 320 с.

[6] *Гусаков Е.З., Савельев А.Н.* // Физика плазмы. 1987. Т. 13. В. 12. С. 1411–1422.
[7] *Абрамовиц М., Стиган И.* // Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
[8] *Кролл Н., Трайвелпис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир. 1975. 526 с.

Харьковский государственный университет

Поступило в Редакцию 8 августа 1993 г.