Письма в ЖТФ, том 20, вып. 3 12 февраля 1994 г.

01;07;12

К ВОПРОСУ О СВЯЗИ КВАНТИЛЬНЫХ ОТСЧЕТОВ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ОДНОМЕРНОГО ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА ПРИ ОБРАБОТКЕ ЕГО С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ФОТОПРИЕМНИКА

Б.А.Лифшиц, Б.Г.Подласкин, Е.А.Чекулаев

В работе [1] описан способ построения фотоприемного устройства, реализующего пространственно-непрерывную модель фоторегистрации. Проведенный анализ [2] показал, что выходные сигналы такого устройства имеют смысл квантильных отсчетов светового распределения. Описание изображения набором N квантилей кратных порядков является не только наиболее информативным, но и позволяет достаточно просто определять некоторые интегральные признаки изображения. В частности, в [2] предложен способ вычисления начальных моментов функции распределения F, заданной на интервале [0,1], по набору квантилей $\{X_k\}_{k=0}^N$. Было показано, что максимально возможная ошибка при вычислениях по этому способу не превышает величины $1/2N$, т.е. не зависит от вида F и от порядка p момента. Независимость от p оценки ошибки в рассмотренном случае обусловлена выбором интервала [0,1]. Кроме того, эта оценка является более грубой, чем могла бы быть при полном использовании информации, содержащейся в последовательности отсчетов $\{X_k\}$.

Целью данной работы является уточнение и обобщение установленного в [2] соотношения, связывающего набор квантилей $\{X_k\}_{k=0}^N$ и интегральные моменты.

Напомним, что по определению квантилем порядка α (непрерывной) функции распределения F является точка X_α (не обязательно единственная), такая, что $(X_\alpha) = \alpha$, $0 < \alpha < 1$ [3]. В дальнейшем X_k (с целочисленным индексом) обозначает отсчет с номером k, полученный по методу [1]. В то же время этот отсчет является квантилем $X_{k/N}$ порядка k/N (см. [2]), в том числе для $k = 0$ или $k = N$, что не должно вызвать недоразумений.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция распределения F и в результате измерений получен набор отсчетов $\{X_k\}_{k=0}^{N}$, которые являются квантилями порядков k/N функции F. Таким образом, $F(a) = F(X_0) = 0$, $F_b = F(X_N) = 1$, $F(X_k) = k/N$.

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ пробную функцию g и будем оценивать ее среднее значение:

$$\mathbf{g} = Mg(X) = \int_a^b g(x)dF(x) = \int_{X_0}^{X_N} g(x)dF(x)$$

с помощью последовательности $\{X_k\}$. Разбив область интегрирования $[X_0, X_N]$ на N промежутков $I_k = [X_k, X_{k+1}]$, воспользуемся очевидными неравенствами

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \inf_{x\in I_k} g(x) \leqslant \mathbf{g} \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \sup_{x\in I_k} g(x) \tag{1}$$

в следующих двух частных случаях.

Предложение 1. Если функция g монотонна, то

$$\left|\mathbf{g} - \frac{1}{N}S_N\right| \leqslant \left|\frac{g(X_N) - g(X_0)}{2N}\right|, \tag{2}$$

где

$$S_N = \sum_{k=1}^{N-1} g(X_k) + \frac{g(X_0) + g(X_N)}{2}. \tag{3}$$

Предложение 2. Если функция g неотрицательна, убывает на некотором интервале $[X_0, \xi] \subset [X_0, X_N]$ и затем возрастает на $[\xi, X_N]$, то

$$\left|\mathbf{g} - \frac{1}{N}S_N\right| \leqslant \frac{g(X_N) + g(X_0)}{2N}, \tag{4}$$

где S_N определяется как (3).

Замечание 1. Если в (2) и (4) заменить X_0 и X_N на a и b, то получим абсолютные, т.е. не содержащие результатов измерений, оценки ошибки

$$\left|\frac{g(b) - g(a)}{2N}\right| \quad \text{и} \quad \frac{g(a) + g(b)}{2N}.$$

Если g — функция ограниченной вариации, причем в условиях предложения 2 $g(\xi) = 0$, то обе эти абсолютные оценки можно записать в виде $\frac{\operatorname{var} g}{2N}$, где $\operatorname{var} g$ — вариация функции g. Напомним, что для гладкой функции g:

$$\operatorname{var} g = \int_a^b \left| \frac{dg}{dx} \right| dx.$$

Для доказательства предложения 1 заметим, что в силу монотонности функции g

$$\sum_{k=0}^{N-1} \inf_{x \in I_k} g(x) = \sum_{k=0}^{N} g(X_k) - M,$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sup_{x \in I_k} g(x) = \sum_{k=0}^{N} g(X_k) - m,$$

где $M = \max_k g(X_k)$ и $m = \min_k g(X_k)$.

Поэтому, согласно (1),

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N} g(X_k) - M\right) \leqslant \mathbf{g} \leqslant \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N} g(X_k) - m\right).$$

Длина промежутка, содержащего значение $\mathbf{g}$, равна

$$\frac{1}{N}(M - m) = \frac{g(X_0) - g(X_N)}{N},$$

поскольку максимум M и минимум m достигаются на концах интервала $[X_0, X_N]$. Середина этого промежутка находится в точке

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N} g(X_k) - \frac{N+m}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N-1} g(X_k) + \frac{g(X_0) + g(X_N)}{2}\right) = \frac{1}{N} S_N$$

и является оценкой $\mathbf{g}$.

Предложение 1 доказано.

Для доказательства предложения 2 снова воспользуемся неравенствами (1). Оценка сверху

$$\mathbf{g} \leqslant \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N} g(X_k) - m\right)$$

остается справедливой, поскольку в N неравенствах

$$\int\limits_{X_k}^{X_{k+1}} g(x)dF(x) \leqslant \frac{1}{N}\max\{g(X_k), g(X_{k+1})\}$$

каждое из чисел $g(X_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ присутствует в правой части ровно один раз, за единственным исключением $g(X_r) = m$. Следовательно, тем более верна оценка

$$\mathbf{g} \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} g(X$$

С другой стороны, в неравенствах

$$\int\limits_{X_k}^{X_{k+1}} g(x)dF(x) \geqslant \frac{1}{N}\inf_{x\in I_k} g(x)$$

правые части равны $(1/N)\min\{g(X_k), g(X_{k+1})\}$ для промежутков I_k, кроме может быть одного промежутка I_r, содержащего точку ξ, в которой функция g достигает минимума. Для этого промежутка

$$\frac{1}{N}\inf_{x\in I_r} g(x) = \frac{g(\xi)}{N} = \inf_{x\in[X_0, X_k]} g(x) \geqslant 0.$$

Поскольку

$$\min\{g(X_k), g(X_{k+1})\} = \begin{cases} g(X_{k+1}), & k < r \\ g(X_k), & k > r \end{cases}$$

получаем оценку снизу

$$\mathbf{g} = \int\limits_{I_r} g(x)dF(x) + \sum_{k\neq r}\int\limits_{I_r} g(x)dF(x) \geqslant \frac{1}{N}\left(g(\xi) + \sum_{k=1}^{N-1} g(X_k)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} g(X_k).$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} g(X_k) \leqslant \mathbf{g} \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} g(X_k).$$

Определим длину промежутка, содержащего $\mathbf{g}$, и его середину. Длина равна $(g(X_0)+g(X_N))/N$, а середина есть величина $(1/N)S_N$.

Предложение 2 доказано.

Замечание 2. Более точная оценка для g в последнем случае, не пренебрегающая величинами $m = \min\limits_k g(X_k)$ и $g(\xi) = \inf\limits_{x\in[X_0,X_N]} g(x) \geqslant 0$, такова

$$\tilde{S}_N = \sum_{k=1}^{N-1} g(X_k) + \frac{g(X_0)+g(X_N)}{2} - \frac{m-g(\xi)}{2},$$

$$\left|\mathbf{g} - \frac{1}{N}\tilde{S}_N\right| \leqslant \frac{1}{2N}\left(g(X_0)+g(X_N)-m-g(\xi)\right) \qquad (5)$$

(отметим, что для рассматриваемых далее функций $g(x) = (x-\xi)^p$ $g(\xi)=0$).

Применим предложения 1 и 2 для оценки моментов $M(X-\xi)^p$ и $M|X-\xi|^p$ произвольного порядка $p>0$ относительно выбранной точки ξ.

В двух случаях:

а) когда p — нечетное целое число,

б) $\xi \notin [a,b]$

для оценки момента $M(X-\xi)^p$ применимо предложение 1, т.е.

$$\left|N(X-\xi)^p - \frac{1}{N}S_N\right| \leqslant \left|\frac{(X_N-\xi)^p-(X_0-\xi)^p}{2N}\right|, \qquad (6)$$

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1}(X_k-\xi)^p + \frac{(X_N-\xi)^p+(X_0-\xi)^p}{2}.$$

В других случаях, когда $\xi\in[a,b]$ и $g(x) = (x-\xi)^{2n}$ или $g(x) = |X-\xi|^p$, действует предложение 2:

$$\left|M\,|X-\xi|^p - \frac{1}{N}S_N\right| \leqslant \frac{|X_N-\xi|^p+|X_0-\xi|^p}{2N}, \qquad (7)$$

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1}|X_k-\xi|^p + \frac{|X_N-\xi|^p+|X_0-\xi|^p}{2}.$$

Возвращаясь к замечанию 2, отметим, что во многих практически важных случаях, особенно когда рассматриваются центральные моменты $M(x-MX)^{2n}$ одномодового распределения, действительно можно не учитывать слагаемое $m = \min_k \{(X_k - MX)^{2n}\}$ без большого ущерба для точности, поскольку плотность расположения квантилей в точках, близких к MX, близка к максимальной, и величина m значительно меньше полученной в (7) оценки ошибки.

В отличие от неравенства в [2], полученного для интервала [0,1] и $\xi = 0$, неравенства (6) и (7) дают возможность непосредственно оценивать моменты относительно любой точки $\xi \in [a, b]$, в то время как при использовании результатов работы [2] было необходимо представление моментов $M(X - \xi)^p$ через начальные моменты.

Как видно из построения оценки ошибки, полученная оценка в (6) и (7) является минимальной, во всяком случае с учетом замечания 2, и она может быть улучшена только с привлечением дополнительной информации о свойствах функции F.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код 93-02-14865.

Список литературы

[1] *Подласкин Б.Г.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. В. 8. С. 1610–1616.
[2] *Подласкин Б.Г., Чекулаев Е.А.* // ЖТФ. 1993. В. 11.
[3] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.

Физико-технический институт
им. А.Ф.Иоффе
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
9 декабря 1993 г.