01;05.1

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ ВОЛНАХ В ПЛАСТИНЕ

Е.В.Сокуринская

В работе строятся и исследуются точные квазистационарные решения задачи о распространении продольных волн деформации в пластине из нелинейно-упругого сжимаемого или несжимаемого материала с учетом влияния инерции поперечных смещений и изгиба продольных волокон пластины.

Рассмотрим задачу о волнах продольной деформации в однородной изотропной бесконечной нелинейно-упругой пластине. Введем систему лагранжевых декартовых координат $\mathbf{x}(x, y, z)$, так что срединная плоскость пластины описывается уравнением $z = 0$, а боковые поверхности — уравнениями $z = \pm h/2$, h — толщина пластины. Вывод системы уравнений основан на вариационном принципе Гамильтона в предположении, что деформирование материала описывается соотношениями нелинейной теории упругости несжимаемой или сжимаемой среды [1]. Кроме того, если деформации симметричны по толщине пластины, а характерные длины волн значительно превосходят h, то перемещения $\mathbf{u}(u, v, w)$ аппроксимируются следующим образом [2]: $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $w = (x, y, t)$, t — время.

Рассмотрим несжимаемые пластины. Можно показать, что учет условия несжимаемости ($\mathrm{Det}|G| = 1$, где G — мера деформации Коши–Грина) позволяет явно выразить смещение w, перпендикулярное плоскости пластины, через смещения u и v:

$$w = z\left(((1 + u_x)(1 + v_y) - u_y v_x)^{-1} - 1\right). \qquad (1)$$

Вычисляя плотность лагранжиана L для несжимаемого материала Муни

$$L = \rho \mathbf{u}_t^2/2 - \mu/4\left((1+\beta)(I_1(G) - 3) + (1-\beta)(I_2(G) - 3)\right), \qquad (2)$$

где ρ — плотность материала, μ — модуль сдвига, β — модуль упругости III порядка, $|\beta| \leqslant 1$, I_i — инварианты G, записывая условия стационарности функционала действия, получим систему

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{3}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}u_{yy} + \varepsilon\left(\frac{1}{48}(4s_{tt} - s_{xx} - s_{yy})_x + R_{1x} + R_{2y}\right), \tag{3}$$

$$R_1 = -\frac{1}{4}\left(6u_x^2 + v_y^2 + \frac{1}{2}u_y^2 + \frac{1}{2}v_x^2 + 4u_yv_x + 2u_xv_y\right) + $$

$$+\frac{\beta}{4}\left(\frac{1}{2}(u_y + v_x)^2 - 2v_y(2u_x + v_y)\right),$$

$$R_2 = \frac{s}{4}\left(\beta(u_y + v_x) - u_y - 4v_x\right), \qquad s \equiv u_x + v_y,$$

причем второе уравнение системы получается из (3) формальной заменой x на y, y на x, u на v, v на u. В (3) введены безразмерные переменные по формальному правилу $\mathbf{f} = \frac{f}{F}$, где F — масштаб для размерной величины f. Малый параметр ε введен так, чтобы в выражении для L слагаемые, описывающие влияние нелинейности материала и дисперсии волн, были бы одинаковы по порядку величины и малы по сравнению с кинетической и потенциальной энергией пластины, вычисленной в рамках линейной теории: $\varepsilon = \frac{U}{X} = \frac{V}{Y} = \frac{W}{Z} = \left(\frac{Z}{X}\right)^2 \ll 1$, $Z = h$. Система (3) без учета нелинейности ($R_1 = R_2 = 0$) аналогична известным уравнениям уточненной теории продольных волн в несжимаемых пластинах для двухмодовой модели симметричных движений в слое [2]. При выводе уравнений для модели сжимаемого нелинейно-упругого материала Мурнагана используем приближения обобщенного плоского напряженного состояния [2]: $w = -\frac{\nu z}{1-\nu}(u_x + v_y)$ и приведем уравнения волн продольной деформации в окончательной форме:

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1-\nu}{2}u_{yy} + \frac{1+\nu}{2}v_{xy} +$$

$$\varepsilon\left(R_{3x} + R_{4y} + \frac{\nu^2}{12(1-\nu)^2}\left\{s_{tt} - \frac{1-\nu}{2}(s_{xx} + s_{yy})\right\}_x\right) \tag{4}$$

$$R_3 = \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2\right) + su_x + \frac{1-\nu}{2}\left(u_yv_x - v_y^2 - 2u_xv_y\right) +$$

$$+\beta_1\left(\frac{1}{2}(u_y + v_x)^2 - 2v_y(2u_x + v_y)\right) + \frac{3}{2}\beta_2 s^2,$$

$$R_4 = s\left(u_y + \frac{1-\nu}{2}v_x + \beta_1(u_y+v_x)\right),$$

$$T = X\sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}, \qquad \beta_1 = \frac{1+\nu}{E}\left((1-2\nu)m + \frac{\nu}{2}n\right),$$

$$\beta_2 = \frac{2(1-2\nu)(1+\nu)}{3E(1-\nu)^2}\left((1-2\nu)^2(1+2m) + 6\nu(1-\nu)m\right),$$

где ν — коэффициент Пуассона, l, m, n — модули Мурнагана, E — модуль Юнга. Заметим, что слагаемые s_{xtt}, s_{ytt} в системах (3) и (4) приближенно описывают инерцию поперечных смещений пластины, а члены $(s_{xx}+s_{yy})_x$, $(s_{xx}+ + s_{yy})_y$ — влияние изгиба продольных волокон при деформации на распространение нелинейных продольных волн.

Ранее (см., например, [3,4]) двумерные нелинейные волновые процессы исследовались на основе сведения системы уравнений к уравнению Кадомцева–Петвиашвили: $(Z_j + + a_1 Z Z_r + a_2 Z_{rrr})_r + Z_{YY} = 0(\varepsilon)$, после замены вида $r = x - t$, $j = \varepsilon x$, $Y = \sqrt{\varepsilon}\,y$, $u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)$, $v = \sqrt{\varepsilon}(v_0 + \varepsilon v_1 + O(\varepsilon^2))$, $Z = u_{0r}$ и отбрасывания слагаемых $O(\varepsilon)$. Отметим, что предельный переход $\varepsilon \to 0$, вообще говоря, требует отдельного исследования, т.е. задача при этом становится сингулярно возмущенной.

Нашей целью будет построение точных квазистационарных решений систем (3) и (4) без предельного перехода $\varepsilon \to 0$, при котором не возникает необходимости в разложении перемещений в ряды по ε и предположении малости v по сравнению с u. Мы будем интересоваться решениями (3) и (4) с учетом периодических граничных условий для u, v и их производных, или для локализованных решений — с учетом нулевых граничных условий при $x, y \to \pm\infty$ для u, v и их производных до III порядка включительно.

Введем функции деформаций $f = u_x$, $e = u_y$, $g = v_y$, $q = v_x$ и фазовую переменную $\theta = x \pm ky \pm Vt$, V, k — const. Тогда (3) примет вид

$$\left(\left(V^2 - 1 - \frac{k^2}{4}\right)f - \frac{3}{4}g - \varepsilon\left(\frac{1}{48}s_{\theta\theta}\left(4V^2 - 1 - k^2\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + R_1 \pm kR_2\right)\right)_{\theta\theta} = 0,$$

$$\left(\left(V^2 - \frac{1}{4} - k^2\right)g - \frac{3}{4}k^2 f - \varepsilon\left(\frac{k^2}{48}s_{\theta\theta}\left(4V^2 - 1 - k^2\right) + \right.\right.$$

$$+k^2\bar{R}_1 \pm k^2\bar{R}_2\Big)\Big)_{\theta\theta} = 0,$$

$$q = \pm\frac{g}{k}, \qquad \epsilon = \pm kf. \tag{5}$$

Покажем, что система (5) может быть сведена к одному нелинейному уравнению относительно $f(\theta)$. Действительно, вычтем из первого уравнения, умноженного на k^2, второе уравнение. Тогда полученное соотношение после двукратного интегрирования с учетом граничных условий приводит к простой связи между $f(\theta)$ и $g(\theta)$:

$$g = k^2 f \text{ или } p^2 - 4V^2 = \varepsilon p^2(1-\beta)(f+g), \qquad p^2 = k^2 + 1. \tag{6}$$

Легко показать, что второе из соотношений (6) приводит задачу к линейной и в дальнейшем не рассматривается. Явный учет первого условия позволяет свести систему (3) к одному уравнению:

$$f_{\theta\theta} + af^2 + 12bf = 0, \tag{7}$$

где $a = \frac{72p^2}{p^2-4V^2}$, $b = \frac{4(V^2-p^2)}{\varepsilon p^2(p^2-4V^2)}$, которое заменой $f(\theta) = -$ $-\frac{6}{a}(W+b)$ при водится к уравнению Вейерштрасса:

$$W_{\theta\theta} = 6W^2 - 6b^2, \tag{8}$$

разрешимому в эллиптических функциях [5]. Приведенный вывод в равной степени справедлив и для модели Мурнагана, см. (4), но коэффициенты (7) имеют другой вид:

$$a = \frac{36p^2(1+\beta_2)(1-\nu)^2}{\nu^2(2V^2-(1-\nu)p^2)}, b = \frac{2(V^2-p^2)(1-\nu)^2}{\varepsilon p^2\nu^2((1-\nu)p^2-2V^2)}.$$

Уравнение (8) подробно исследовано в [6,7], где, в частности, показано существование однопараметрических и двухпараметрических решений типа локализованных и периодических разрывов, кноидальных, гармонических и уединенных волн, являющихся частными случаями решения (8) в виде $\wp$-функции Вейерштрасса $W(\theta) = \wp(\theta + \text{const})$. Выражение для уединенной волны в несжимаемой пластине после преобразований переменных примет вид

$$f = A\,\mathrm{ch}^{-2}\left\{\left(\frac{12A}{4\varepsilon p^2 A - 3}\right)^{1/2}(\theta + \text{const})\right\}, \tag{10}$$

где $A = \frac{1-V_0^2}{\varepsilon p^2}$. Условие локализации (10) приводит к ограничениям:

$$V_0^2 > 1, \qquad 0 < V_0^2 < \frac{1}{4}. \tag{11}$$

Таким образом, двухпараметрическое решение (10) описывает как сверхзвуковые волны сжатия с $A < 0$ и $V_0^2 > 1$, так и дозвуковые волны растяжения при $0 < 3/(4\varepsilon p^2) < A < (\varepsilon p^2)^{-1}$, $V^2 < 1/4$. Уединенные волны (10) со скоростями, принадлежащими "мертвой зоне" $1/4 \leqslant V_0^2 \leqslant 1$, невозможны, однако в этом случае может существовать решение вида

$$f = \frac{2A}{3} - A\,\mathrm{ch}^{-2}\left\{\left(\frac{12A}{3-4\varepsilon p^2 A}\right)^{1/2}(\theta + \mathrm{const})\right\}, \tag{12}$$

допускающее постоянную деформацию при $|\theta| \to \infty$. Отметим, что существование "мертвой зоны" скоростей было исследовано в [6,7] для одномерной задачи. Уединенная волна деформации в сжимаемой пластине имеет вид

$$f(\theta) = \frac{B}{1+\beta_2}\mathrm{ch}^{-2}\left[\frac{1-\nu}{\nu}\left(\frac{6B}{(1+\nu)+2\varepsilon p^2 B}\right)^{1/2}(\theta + C_1)\right],$$

$$B = (V_0^2 - 1)/(\varepsilon p^2) \tag{13}$$

существует, если V_0 подчинена условиям $V_0^2 > 1$ или $V_0^2 < (1-\nu)/2$ и при $\nu = 0.5$, $\beta_2 = -2$ совпадает с решением (10) для несжимаемых пластин. При $\beta_2 > -1$ (оргстекло, плавленый кварц, стекло) решение (13) описывает сверхзвуковые импульсы растяжения с $V_0^2 > 1$ и $B > 0$ или дозвуковые волны сжатия с $B < 0$, $V_0^2 < (1-\nu)/2$. В случае $\beta_2 < -1$ (большинство металлов) решение (13), так же как и (10) для несжимаемых пластин, описывает сверхзвуковые уединенные волны сжатия ($B > 0$) или дозвуковые волны растяжения ($B < 0$). Добавка к скорости нелинейной волны в пластине по сравнению с линейной задачей является величиной $O(\varepsilon)$ и зависит не только от амплитуды волн, как в одномерном волноводе [6], но и от направления ее распространения.

Подчеркнем, что параметры точного локализованного решения(10) или (12) системы нелинейных уравнений существенно отличаются от приближенного решения, полученного в результате сведения исходной системы к уравнению КП. Можно показать, что разности между точными и приближенными значениями амплитуды и ширины волны являются величинами того же порядка $O(\varepsilon)$, что и поправки, возникающие в нелинейной задаче по сравнению с линейной, и только при скоростях, близких к скорости волн в линейно-упругой пластине. Кроме того, условие локализации точного решения (10) выделяет два интервала разрешенных значений скоростей импульса, а аналогичное условие для решения КП приводит к одному неравенству вида $V^2 > (p^2+(2p^2-1)^{1/2})/2$, или, что то же самое, $A < 0$, т.е. приближенное решение не описывает волны растяжения. Это указывает на некоторые неточности при традиционном описании [3,4] двумерных нелинейных волн деформации с помощью уравнения КП.

Список литературы

[1] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
[2] *Григолюк Э.С., Селезов И.Г.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНИТИ, 1973. 273 с.
[3] *Nariboli G., Sedov A.* // J. Math. Anal. Appl.1970. V. 32. N 5. P. 661–677.
[4] *Потапов А.И., Солдатов И.Н.* // Акустический журнал. 1984. Т. 30. В. 6. С. 819–822.
[5] *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1936. 526 с.
[6] *Самсонов А.М.* // ДАН СССР. 1988. Т. 299. В. 5. С. 1083–1086.
[7] *Самсонов А.М., Сокуринская Е.В.* // Нелинейные волны деформации в упругих волноводах, взаимодействующих с внешней средой. Препринт ФТИ АН СССР, Л.: 1988. N 1293. 32 с.

Физико-технический
институт им.А.Ф.Иоффе
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
4 ноября 1993 г.