Письма в ЖТФ, том 20, вып. 7 12 апреля 1994 г.

01;03

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ ПРЕЦЕССИИ ВИНТОВОГО ВИХРЯ

П.А.Куйбин, В.Л.Окулов

При изучении закрученных потоков и происходящих в них процессов (горения, энергоразделения, сепарации и пр.) наблюдается потеря устойчивости осевого вихря, который сворачивается в винтовую прецессирующую (вращающуюся) спираль. Как отмечается в многочисленных исследованиях (см. обзор в [1]), процессия вихревого ядра здесь играет определяющую роль. Вопрос же об определении ее частоты до сих пор не решен. Анализ поля скорости в точном решении задачи о бесконечно тонкой винтовой вихревой нити в трубе [2] показывает, что самоиндуцированная скорость вихревой нити равна бесконечности. В реальной жидкости ядро вихря всегда имеет конечный размер. Соответственно и самоиндуцированная скорость вихря оказывается конечной. Попытки вычислить угловую скорость винтового вихря в безграничном пространстве предпринимались многими исследователями. В [3–5] результаты получены в предположении о том, что сечение вихря плоскостью $z = \mathrm{const}$ представляется кружком размера ε, а в [6] — сечение считалось круглым в плоскости, перпендикулярной винтовой оси вихря. Расчет проводился приближенно с привлечением метода усечения, когда при расчете индуцируемой вихрем скорости по формуле Био–Савара учитывается вклад лишь от малого участка вихря.

Перечисленные выше результаты сложно распространить для оценки вращения вихря в трубах, так как расчет поля скорости по закону Био–Савара существенно усложняется из-за наличия стенок трубы. Другой их недостаток связан с рассмотрением лишь конечного участка вихря. Точное решение для поля скорости индуцированной винтовой вихревой нитью в трубе, полученное в [2], позволяет более строго вывести формулу для угловой скорости вращения вихря Ω как в безграничном пространстве, так и в трубе после его подстановки в представление

$$\Omega = \frac{1}{a} \int u_\varphi(\rho, \varphi, z; \rho', \varphi', z')\, \omega(s, \theta)\, s\, ds\, d\theta, \tag{1}$$

где ω — функция, определяющая завихренность в ядре; u_φ — окружная компонента скорости, индуцированной винтовой вихревой нитью единичной интенсивности; интегрирование ведется по всем элементарным нитям, проходящим через кружок радиуса ε с центром в точке $(a, \varphi_0, 0)$; ρ, φ, z — цилиндрические координаты; s и θ — локальные координаты сечения вихря плоскостью, перпендикулярной его винтовой оси.

Точное решение для u_φ [2] представлено в виде ряда из произведений модифицированных цилиндрических функций (I_m и Z_m). Определять скорость без явного выделения особенности типа полюса некорректно. Поэтому, формально подставляя асимптотические представления для цилиндрических функций в решение для u_φ и сворачивая полученные ряды по формулам из [7], выделим особенность явно:

$$S = \frac{lC_a}{2aC_\rho}\left\{\left\{\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}\right\} + \frac{1 - e^{(\eta_a - \eta_\rho)}\cos(\chi - \chi_0)}{1 + e^{2(\eta_a - \eta_\rho)} - 2e^{(\eta - a - \eta_\rho)}\cos(\chi - \chi_0)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1 - e^{(2\eta_R - \eta_a - \eta_\rho)\cos(\chi - \chi_0)}}{1 + e^{2(2\eta_R - \eta_a - \eta_\rho)} - 2e^{(2\eta_R - \eta_a - \eta_\rho)}\cos(\chi - \chi_0)}\right\},$$

где $\eta_x = \sqrt{1 + x^2/l^2} + \ln\left[x/l(1 + \sqrt{1 + x^2/l^2})\right]$; $C_x = (l^2 + x^2)^{1/4}$; R — радиус трубы; $2\pi l$ — шаг винта, $\chi = \varphi - z/l$; верхняя строка в фигурных скобках соответствует $\rho < a$, а нижняя — $\rho > a$. При этом проекции скоростей определяются формулами

$$u_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi\rho}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} + \frac{\Gamma a}{\pi\rho l}(S + R),$$

$$u_z = \frac{\Gamma}{2\pi l}\left\{\begin{matrix} \beta \\ \beta - 1 \end{matrix}\right\} - \frac{\Gamma a}{\pi l^2}(S + R),$$

где β задается расходом через сечение трубы ($\beta = 1$ для неограниченного пространства), а регулярный остаток ряда R имеет вид

$$R = \sum_{m=1}^{\infty}\left[m\left\{\begin{matrix} I_m\left(\frac{m\rho}{l}\right)\cdot Z'_m\left(\frac{ma}{l}\right) \\ I'_m\left(\frac{ma}{l}\right)\cdot Z_m\left(\frac{m\rho}{l}\right) \end{matrix}\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{lC_a}{2aC_\rho}\left\{\begin{matrix} e^{m(\eta_\rho - \eta_a)} - e^{m(\eta_\rho + \eta_a - 2\eta_R)} \\ -e^{m(\eta_a - \eta_\rho)} - e^{m(\eta_\rho + \eta_a - 2\eta_R)} \end{matrix}\right\}\right]\cos\left[m(\chi - \chi_0)\right].$$

Анализ полученных выражений показывает, что S содержит главную особенность типа полюса, а остаток R — малая величина.

Пренебрегая регулярной частью R в точном решении для u_φ и предполагая равномерное распределение завихренности в ядре $\omega = \Gamma/\pi\varepsilon^2$, удается точно вычислить интеграл в (1) и получить угловую скорость вращения вихря:

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi a^2}\sin^2\alpha\cos\alpha\left[\ln\frac{\varepsilon}{a\cos\alpha} - \frac{1}{2} - \ln\left(1 - e^{2(\eta_a - \eta_R)}\right)\right] - \\ -\frac{\Gamma}{2\pi a^2}\frac{1}{1 - e^{-2(\eta_a - \eta_R)}}, \qquad (2)$$

где $\sin\alpha = a\sqrt{a^2 + l^2}$ и $\cos\alpha = l\sqrt{a^2 + l^2}$. Таким образом, впервые на основе точного решения без усечения вихря найдена формула, определяющая угловую скорость вращения винтового вихря в трубе.

Однако применить для сопоставления с экспериментом формулу (2) невозможно в силу отличия угловой скорости вращения спирального вихря от наблюдаемой в эксперименте частоты прецессии его вихревого ядра. Под последней обычно понимают частоту прохождения сгустка завихренности вблизи фиксированной точки (датчика) на стенке трубы, т.е. частоту f вращения сечения вихря (вихревого ядра) в фиксированной плоскости, которая не совпадает с угловой скоростью Ω вращения вихря. Объясняется это тем, что спиральный вихрь имеет ненулевую осевую скорость. В силу винтообразной структуры вихря даже чистое его перемещение вдоль оси OZ при $\Omega = 0$ приведет к вращению его ядра в фиксированной плоскости, перпендикулярной оси. Учитывая сказанное и связь между осевой и тангенциальной скоростями в потоках с винтовой симметрией [2], для частоты прецессии вихревого ядра получим формулу

$$f = \frac{1}{2\pi}\left[\Omega\frac{d^2 + l^2}{l^2} - \frac{\Gamma\beta}{2\pi l^2}\right]. \qquad (3)$$

Установим соответствие расчетных значений частоты прецессии вихревого ядра по формуле (3) с экспериментом. Из приведенных в [8] данных для двух случаев вращения винтового вихря в цилиндрической трубе с безразмерными частотами прецессии 1.80 и 1.55 были определены обезразмеренные параметры спирального вихря: $\Gamma = 27.0$, $R = 1$, $a = 0.30$, $l = 2.126$, $\varepsilon = 0.50$, $\beta = 0.08$ и $\Gamma = 24.8$, $R = 1$, $a = 0.31$, $l = 2.126$, $\varepsilon = 0.45$, $\beta = 0.05$. Расчет частот по формуле (3), приведенный к безразмерному виду в соответствии с [8], дает значения 1.81 и 1.63. В [9] определена частота прецессии вихревого жгута в отсасывающей трубе гидротурбины 1.8 Гц. Измеренное в [9] поле скорости позволило определить параметры модельного вихря: $\Gamma = 33.82$,$l = 0.285$,

$a = 0.5$, $\varepsilon = 0.18$, $\beta = 0$, для которых рассчитанная по (3) частота 1.75 Гц также хорошо согласуется с экспериментом.

Таким образом, полученная формула (3) впервые позволила достаточно точно оценить скорость прецессии ядра винтообразного вихря, возникающего в закрученных потоках.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ. Авторы благодарят А.А.Борисова и С.В.Алексеенко за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Гупта А., Лилли Д.,, Сайред Н.* // Закрученные потоки. М.: Мир, 1987. 588 С.

[2] *Борисов А.А., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* // ДАН. 1993. Т. 331. В. 1. С. 28–31.

[3] *Жуковский Н.Е.* Вихревая теория гребного винта. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1959. 191 с.

[4] *Arms R.J., Hama F.R.* // Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 553–559.

[5] *Fukumoto Y., Miyazoki T.* // J. Phys. Soc. Jap. 1986. V. 55. P. 4152–4155.

[6] *Adebiyi A.* // Q.J. Mech. Appl. Math. 1981. V. 34. Pt. 2. P. 153–177.

[7] *Прудников А.П., Бычков Ю.А., Марычев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 560 с.

[8] *Guarga R., Gracia J., Sanchez A., Rodal E.* // Proc. Work Group on the Behaviour of Hydraulic Machinery under Steady Oscillatory Conditions, IAHR Session. Mexico city, Mexico. 1985. P. 12/1–12/13.

[9] *Falvey H.T.* // A Review of Present Knowlege & an Annotated Bibliography, RES-ERS-71-42. Engineering & Research Center,Denver, Colorado, 1971.

Институт теплофизики
Новосибирск

Поступило в редакцию
12 декабря 1993 г.