Письма в ЖТФ, том 20, вып. 10 26 мая 1994 г.

01;03;08

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ

Ю.Н.Зайко

Настоящая работа посвящена исследованию определенного класса точных решений уравнений нелинейной акустики, в первую очередь — уравнения Заболотской–Хохлова–Кузнецова (ЗХК); решений асимптотически переходящих в плоскую ударную волну с конечной шириной фронта. Строго говоря, уравнение ЗХК, которое для задач с начальными условиями может быть представлено в виде $(2p_\tau + \alpha p p_\xi - \sigma p_{\xi\xi})_\xi - c\Delta_\perp p = 0$ получено из исходных уравнений Навье-Стокса в предположении малости нелинейных эффектов по сравнению с дифракционными, описываемыми последним слагаемым, и в противоположном случае должно быть заменено уравнением [1]

$$(2p_\tau + \alpha p p_\xi - \sigma p_{\xi\xi})_\tau - c^2\Delta_\perp P = 0. \tag{1}$$

Здесь p — избыточное давление над некоторым произвольно выбранным значением p_0, ξ — продольная координата, τ — медленное время, $\Delta_\perp$ — поперечный лапласиан; коэффициенты α и σ однозначно определяются методом многомасштабных разложений, c — скорость звука. Уравнение ЗХК используется для построения приближенных решений в обоих предельных случаях [2], что в связи со сказанным представляется некорректным.

Уравнения ЗХК и (1) имеют решения в виде плоской ударной волны, для которой $\Delta_\perp p = 0$ [2]:

$$p = p_2 + a\left\{1 + \exp\left[\frac{\alpha}{2\sigma}\left(\xi - \varphi(\tau)\right)\right]\right\},$$

$$\varphi(\tau) = V_0\tau; a = p_1 - p_2, \qquad V_0 = \frac{\alpha}{4}\left(p_1 + p_2\right)$$

$$p_1 = p\left(\xi = -\infty\right), \qquad p_2 = p\left(\xi = +\infty\right), \tag{2}$$

и которая, как показано в [1] с использованием уравнения (1), неустойчива относительно поперечных возмущений. Можно показать, что существуют решения этих уравнений в форме (2), носящие характер возмущенной ударной волны с $\Delta_\perp p \neq 0$, для которых $\varphi(\tau, \mathbf{Y})$, $\mathbf{Y} = (\eta, \xi)$ удовлетворяют определенным системам уравнений, получаемым прямой подстановкой решения (2) в исходные уравнения.

Для уравнения ЗХК:

$$\Delta_\perp \varphi = 0,$$

$$\varphi_\tau - V_0 + \frac{1}{2} c \left(\nabla_\perp \varphi\right)^2 = 0; \tag{3а}$$

для уравнения (1):

$$\varphi_{\tau\tau} - \frac{1}{2} c^2 \Delta_\perp \varphi = 0,$$

$$\left(\varphi_\tau - V_0\right) \varphi_\tau - \frac{1}{2} c^2 \left(\nabla_\perp \varphi\right)^2 = 0. \tag{3б}$$

Характер этих систем уравнений разный, в соответствии с чем они описывают разные возмущения порождающего решения (2). Исключением является косая ударная волна, к которой приводят обе системы. Для их анализа положим $V_0 = 0$, что достигается выбором невозмущенного давления p_0 таким образом, чтобы $p_1 = -p_2$. Тогда уравнения (3) имеют решения в виде волн, распространяющихся со скоростью $\pm \frac{c}{\sqrt{2}}$ с постоянной или изменяющейся амплитудой в зависимости от геометрии. Уравнения (3) при $V_0 = 0$ совпадают с уравнениями для потенциала скоростей плоского безвихревого течения несжимаемой жидкости с бесконечной плотностью [3]. Системы (3, *а*) и (3, *б*)дополняются граничными условиями, которые можно получить из определения поперечных компонент реальной скорости $\rho \frac{\partial \mathbf{V}_\perp}{\partial \tau} = -\nabla_\perp p$. Если возмущение ударной волны вызвано контактом с твердым телом, то граничное условие имеет вид $\nabla_\perp \varphi|_{\gamma=0} = 0$, где $\gamma(\eta, \xi) = 0$ — уравнение границы твердого тела.

Отметим, что к системе (3) приводит и уравнение Кадомцева–Петвиашвили [4] в неустойчивом случае, если искать его решение в виде $s_0(\xi - \varphi(\mathbf{r}, \tau))$, где $s_0(\xi)$ — статическое солитонное решение порождающего уравнения Кортевега–де Вриза. Таким образом, можно лишний раз убедиться в поперечной неустойчивости одномерной ударной волны (2).

Список литературы

[1] *Зайко Ю.Н.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 14. С. 20–22.
[2] *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М., 1990. 238 с.
[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М., 1986. 736 с.
[4] *Петвиашвили В.И., Похотелов О.А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере. М., 1989. 200 с.

Центральный
научно-исследовательский институт
измерительной аппаратуры
Саратов

Поступило в Редакцию
30 января 1994 г.