

01;04
©1994

ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ В КАНАЛАХ: ВОЗВРАТ РЕЖИМА СТАЦИОНАРНОГО ПРИАНОДНОГО СКАЧКА ПРИ УСИЛЕНИИ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

Л. И. Алексеева

Считается, что стационарные течения холловской плазмы существуют лишь при умеренном воздействии эффекта Холла на поток и становятся невозможными при усилении этого эффекта. В настоящей работе мы покажем, что по крайней мере в каналах определенного вида при еще большем увеличении роли эффекта Холла стационарные режимы могут вновь иметь место. Интервал нестационарности приходится на те значения параметров плазмы, при которых неоднородности в плазменной среде, обусловленные эффектом Холла, "чувствуют" присутствие проводящих электродов и электродинамически взаимодействуют с ними. Переход к интервалу нестационарности соответствует появлению токов внутри токовой системы холловских неоднородностей, текущих поперек потока в электрод (или вытекающих из него).

Магнитогазодинамические уравнения движения изотермической плазмы с эффектом Холла, записанные в безразмерном виде, содержат три константы: параметр обмена ξ , непосредственно характеризующий эффект Холла; магнитную вязкость ν и характерное отношение β газового давления к магнитному [1]. Численное решение этой системы уравнений для аксиально-симметричных потоков в азимутальном магнитном поле показало, что при $\xi \neq 0$ существуют (квази-) стационарные течения плазмы. Если зафиксировать значения β и ν , то, по сравнению с некоторым (фоновым) стационарным похожим потоком, соответствующим $\xi = 0$, величины распределены по поперечному сечению канала более неравномерно. Эта неравномерность усиливается с увеличением ξ . Самые большие градиенты наблюдаются вблизи анода, поэтому можно говорить о квази-стационарном прианодном скачке величин. Согласно [1], такие режимы существуют лишь при $\xi < \xi_{кр}$. Определенные численно значения $\xi_{кр}$ авторы аппроксимируют формулой

$$\xi \approx 0.3\beta^{1/4}\nu^{1/2}. \quad (1)$$

Когда $\xi > \xi_{кр}$, решение неограниченно растет в окрестности какой-то точки на аноде. Было отмечено также воз-

никновение быстро нарастающих мелкомасштабных колебаний.

Малость поперечного масштаба холловских неоднородностей позволяет сопоставить данные этих расчетов с результатами исследования плоских двумерных "вытянутых" потоков плазмы $\Pi = (H, \rho, \mathbf{v})$, текущих поперек магнитного поля \mathbf{H} : в декартовой системе координат с осью x вдоль канала такие потоки имеют вид

$$\partial/\partial z = 0, \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, 0), \quad \mathbf{H} = (0, 0, H), \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H} = (H'_y, -H'_x, 0) \quad (2)$$

(штрих вместе со значком переменной внизу означает производную по этой переменной). При достаточно заметном эффекте Холла в области течения, где при $\beta \ll 1$

$$\gamma(x, y) = -\frac{2\xi}{\nu\beta} \left(\frac{H}{\rho}\right)^2 \frac{\partial H}{\partial x},$$

могут существовать волны акустической природы — квази-акустико-гравитационные волны (КАГВ) $[2-8]$. Они распространяются поперек основного потока перпендикулярно \mathbf{H} $[6,4]$. В канале с непроницаемыми для вещества (ионов) стенками КАГВ могут образовывать стоячие волны с узлами вдоль оси y . В работах $[5-6]$ были аналитически изучены свойства этой системы волн, когда в основном (фоновом) стационарном течении $\Pi^{(0)}(x, y)$ практически отсутствует компонента $j_x^{(0)}$ продольного тока. Такое фоновое течение вместе с независящей от времени нулевой модой КАГВ имеет (благодаря КАГВ) компоненту j_x , нарастающую по величине при приближении к аноду. При достаточно больших γs ($s(x)$ — поперечное сечение канала) j_x сосредоточен в узком прианодном слое. Этот режим можно интерпретировать $[3]$ как аналогичный режиму стационарного прианодного скачка в численных экспериментах $[1]$. Аналитическое решение задачи с КАГВ показывает, что при фиксированных ν и β и разных ξ стационарные режимы перестают существовать, когда ξ приближается *снизу* к некоторому значению ξ_* (при этом зависимость ξ_* от ν и β оказывается точно такой же, как в (1)). Сейчас мы покажем, что то же самое происходит, когда ξ приближается *сверху* к некоторому значению ξ_{**} . Другими словами, существует второе критическое значение параметра обмена ξ .

Ниже мы полностью следуем работе $[8]$, где

$$\tilde{H} = Y(x, y, t) + X(x, t); \quad Y \equiv \int_{R_0}^y \tilde{j}_x dy \quad (3)$$

(здесь знак \sim связан с компонентами отклонения $\tilde{\Pi} = (\tilde{H}, \tilde{\rho}, \tilde{v})$) потока $\Pi(x, y, t)$ от $\Pi^{(0)}(x, y)$, такого, что $\tilde{\rho}(x, y, t) \ll 1$; R_0 — некоторая гладкая поверхность между анодом $y = R_1(x)$ и катодом $y = R_2(x)$ в узком канале плавного профиля с $s(x) \sim R_2 \sim R_1 \sim \delta \ll 1$. В п. 4 работы [8] функция Y выражена через $X(x, t)$, $\tilde{\rho}(x, y, t)$ и $A(x, t)$ — константу интегрирования по y уравнения индукции (6) той же работы. Граничные условия $\tilde{E}_p = 0$ на обоих электродах $y = R_j(x)$ при подстановке Y приобретают вид

$$\psi - A + \left[\frac{\xi}{\nu} A(R_j - R_0) \right]'_x + (\xi h X - \xi X'_x) + \left[(R_j - R_0)J - (R_j)'_x \nu X'_x + \frac{\xi}{\nu} J R_0 (R_0)'_x \right] = 0, \quad (4)$$

$$\psi \equiv \frac{\xi D}{2\rho} \left(h\tilde{\rho} - \frac{\partial}{\partial p} \tilde{\rho} \right) + \frac{\xi^2}{\nu} \frac{\partial}{\partial p} \int_{R_0}^y h\tilde{\rho} dy, \quad (5)$$

где $J(x, t) \equiv X'_t - \nu X''_{xx}$; p — переменная, отсчитываемая вдоль электрода; $D \equiv \beta/2$; $h = \rho'_{0x}/\rho_0$; $\rho_0 \equiv \rho_0(x)$ есть главный член разложения $\rho^{(0)}$ по δ (здесь и ниже все формулы записаны для области значений ν , где $x'_t \geq \nu X''_{xx}$ — области S по терминологии п. 4 [8].* В тех же условиях на параметры и функции, что и в [8], член с квадратной скобкой, содержащий A , имеет порядок $\varepsilon_A A$, а последнее выражение, заключенное в квадратные скобки и определяемое X , оказывается порядка $\varepsilon_X (\xi h X - \xi X'_x)$, причем

$$\varepsilon_A = 0 \left(\left(\frac{\xi}{\nu} \frac{\delta}{\sqrt{D}} \right)^2 \right), \quad \varepsilon_X = 0 \left(\frac{\sqrt{D}}{\xi} \right). \quad (6)$$

На плоскости $(\xi, \nu)\varepsilon_A = \varepsilon_X$ в точках кривой $\xi = \xi_A(\nu) = \sqrt{D}\delta^{-\frac{2}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}$. Она изображена пунктиром на рис. 1 и 2. Ниже этой кривой $\varepsilon_x > \varepsilon_A$, и поэтому, изучая в [8] эту часть плоскости (ξ, ν) , мы пренебрегали величиной ε_A по сравнению с единицей, оставляя в формуле (4) только ε_X . При этом равенство

$$\tilde{E}_p \Big|_{R_2} - \tilde{E}_p \Big|_{R_1} = 0 \quad (7)$$

* Отметим, что все точки кривых на рисунке работы [8] соответствуют области S ; исключение составляет линия с $b = 0.25$, но она находится на “пределе видимости” формул и здесь не обсуждается.

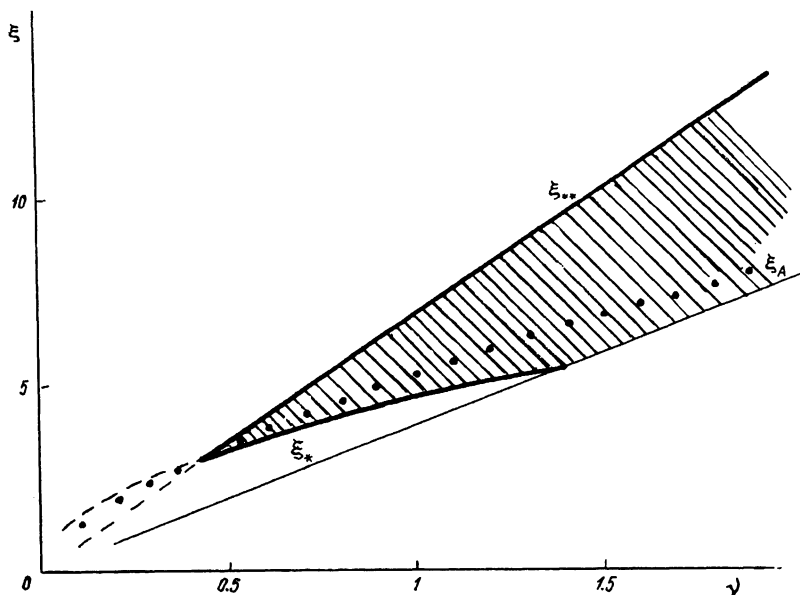


Рис. 1. Сплошные линии — $\xi = \xi_*(\beta, \nu)$ и $\xi = \xi_{**}(\beta, \nu)$ для $b = \beta/(2\delta) = 7$. Заштрихована область $\xi_*(\beta, \nu) \leq \xi \leq \xi_{**}(\beta, \nu)$ заведомо нестационарных решений. Штриховые линии — продолжение сплошных в область меньших ν . Пунктир — кривая $\xi = \xi_A(\beta, \nu)$. Тонкая прямая — ограничивает снизу область, в которой справедливо полученное решение.

давало уравнение для X .

Теперь мы рассмотрим область, где $\varepsilon_X < \varepsilon_A$. Пренебрегая ε_X по сравнению с единицей и оставляя ε_A , получаем из (7) уравнение

$$\psi \Big|_{R_1}^{R_2} + \left[\frac{\xi}{\nu} A s \right]'_x = 0 \quad (8)$$

для $A(x, t)$. Находя отсюда функцию A и подставляя ее в (4) для $y = R_1(x)$, определим

$$X(x, t) = \frac{\nu}{\xi^2} \rho_0 \int_0^x \frac{dx}{\rho_0 s} \int_0^x \psi \Big|_{R_1}^{R_2} dx. \quad (9)$$

При подстановке A в уравнение (9) работы [8] для Y (см. п. 4 этой работы) получается

$$Y = -\frac{\xi}{\nu} \int_{R_0}^y h \tilde{\rho} dy + \frac{\xi}{\nu} (y - R_0) \theta_1(x, t), \quad (10)$$

где $\theta_1 = \theta_1\{x\}$ определяется известными дифференциальными операциями над $X(x, t)$.^{*} Для дальнейшего нам важно только, что $\theta_1 \sim X'_x$.

Таким образом, магнитное поле $\tilde{H} = Y + X$ оказалось выраженным через $\tilde{\rho}$. Теперь из уравнений Эйлера и непрерывности так же, как в [4,8] найдем v и $\tilde{\rho}$. Для $\tilde{\rho}$ при учете газодинамического условия $\tilde{v}_n|_{R_j} = 0$ непроницаемости стенок получается краевая задача

$$\tilde{\rho}''_{tt} = D\tilde{\rho}''_{yy} + \gamma D\tilde{\rho}y' + \theta_2(x, t), \quad (11)$$

$$\tilde{\rho}'_y + \gamma\tilde{\rho} = \theta(x, t) \quad \text{при} \quad y = R_j(x), \quad (12)$$

где $\theta_2 \sim X'_x$, $\theta \sim \Gamma X'_x$ суть известные выражения с $X(x, t)$, $\Gamma \equiv \xi(\nu D)^{-1} \gg 1$; $\gamma(x) = -\Gamma\rho'_0 x$.

Как и в [8], представим себе сначала, что θ_2 и θ пренебрежимо малы по сравнению с другими членами равенств, в которые они входят. В этом случае (11), (12) представляют собой обычную задачу для КАГВ, решение которой известно [5-8]. Поскольку поперечный масштаб КАГВ составляет γ^{-1} , здесь $\int \tilde{\rho} dy \sim \Gamma^{-1} \tilde{\rho}$. При этом, как видно из (5), (9), (10), $\psi \sim \xi D \Gamma \delta \tilde{\rho}$, и, следовательно,^{**}

$$X \sim \tilde{\rho}(\Gamma\delta)^{-2}, \quad (13)$$

а в выражении $\tilde{H} = X + Y$ имеем $X \gg Y$ (напомним, что у КАГВ $(\partial/\partial x) \sim \Gamma\delta \ll \Gamma \sim (\partial/\partial y)$), поэтому Y , несмотря на свою малость, определяет компоненту \tilde{j}_x в (2), которая может превышать $\tilde{j}_y = -X'_x$. Обозначим известное решение однородной задачи (11) (12) (т.е. суперпозицию КАГВ) через $\rho^{(1)}$. Теперь, меняя параметры ξ и ν , будем следить за величинами θ_2 и θ . Из сравнения между собою отношений

$$\frac{\theta_2}{\tilde{\rho}''_{tt}} \sim \frac{X'_x}{\tilde{\rho}\Gamma^2 D}; \quad \frac{\theta}{\gamma\tilde{\rho}} \sim \frac{X'_x}{\tilde{\rho}} \gg \frac{\theta_2}{\tilde{\rho}''_{tt}} \quad (14)$$

* Такой же вид имеет Y в работе [8] (в статье формула не выписана).

** Мы считаем здесь $\psi|_{R_1}^{R_2} \sim \psi$, для определенности имея в виду случай такого асимптотического разложения по δ , когда $D = 0(\delta)$ и $\Gamma\delta = 0(\delta^0)$.

величин θ_2 и θ к другим членам (11) и (12) видно, что в первую очередь проявит себя влияние θ . Когда это произойдет, будем искать решение (11), (12) в виде $\bar{\rho} = \rho^{(1)} + \rho^{(2)}$, где $\rho^{(2)} \ll \rho^{(1)}$ связано с неоднородностью $\theta\{\bar{\rho}\} \approx \theta\{\rho^{(1)}\}$ в граничных условиях. Эта ситуация аналогична рассмотренной в работе [8]: там показано, что $\rho^{(2)}$ всегда зависит от времени.

Таким образом, в той области на плоскости (ξ, ν) , где становится заметным $\rho^{(2)}$, стационарное решение $\bar{\rho} = \rho^{(1)} + \rho^{(2)}$ задачи (11), (12) исчезает. Иначе говоря, перестает существовать режим стационарного прианодного скачка. Это связано с увеличением веса $X'_x\{\rho^{(1)}\}$ в условиях (12) на электродах. Отметим, что нормальная к электроду составляющая тока $\tilde{j}_n = \tilde{j}_y - (R_j)'_x \tilde{j}_x$ имеет в этой области, согласно (2), (10), (13), величину $\tilde{j}_n = -X'_x$. Соответственно увеличение значимости X'_x в (12) означает интенсификацию обмена токами между плазмой и электродами.

По-видимому, этот результат выходит за рамки рассмотренного здесь класса течений. Так, авторы [1] указывают на образование токовой петли у анода как на предвестника перехода от стационарного прианодного скачка к нестационарным режимам. Поскольку в численном эксперименте для скачка было характерно проскальзывание тока вдоль анода, появление токовой петли и означает более активный обмен токами между холловской неоднородностью в плазме и электродом.

В рассмотренных нами течениях плазмы, согласно (12), $\rho^{(2)} \sim \theta\{\rho^{(1)}\}\gamma^{-1} \sim X'_x\{\rho^{(1)}\}$. С учетом выражения (13) для X имеем

$$\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \sim \frac{\xi_{**}}{\xi}, \quad \xi_{**}(\beta, \nu) \equiv b\nu, \quad b \equiv D/\delta \quad (15)$$

(напомним, что $D \equiv \beta/2$). Отсюда видно, что режим стационарного прианодного скачка перестает существовать, если при фиксированных β и ν параметр ξ приближается сверху к $\xi_{**}(\beta, \nu)$. Интервал нестационарности $\xi_* < \xi < \xi_{**}$ (ξ_* получено в работе [8]), по мере перехода к которому сверху и снизу имеет место все более активный обмен токами между плазмой и проводящими стенками канала, представлен на рис. 1 и 2.

* То же самое можно сказать и об области значений (ξ, ν) , рассмотренной в [8]. Отметим заодно, что опущенные в настоящей работе члены уравнений несущественны при тех же условиях, что и в п. 7 работы [8].

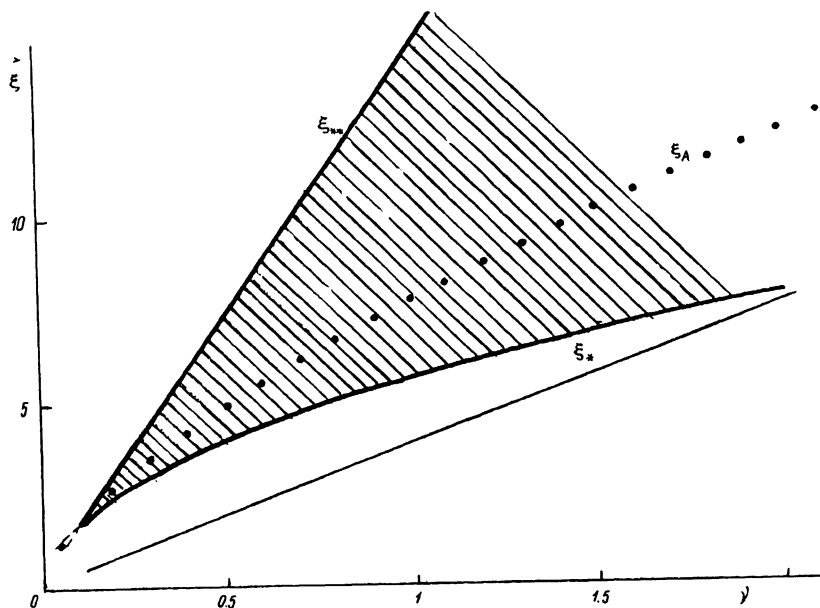


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для $b = 15$.

Отметим в заключение, что при достаточно малых ν (см. рисунки) интервал нестационарности сходит на нет и обычный стационарный прианодный скачок может существовать при всех (в рамках принятых в [8] требований к параметрам) значениях ν . Это контрастирует с данными численного эксперимента [1], где, напротив, на нет сходит диапазон ξ , при которых могут существовать стационарные течения. Различие выводов, по-видимому, связано с тем, что моделирование велось для случая сплошных электродов. В этих условиях электрический ток течет поперек потока лишь при достаточно больших ν . Когда же $\nu \rightarrow 0$, у электрода образуется пограничный слой с большим продольным током [9]. Избежать его образования можно путем секционирования электродов, к которому мы, следуя [9], и прибегаем. Поэтому в нашей задаче, в отличие от [1], ток и при малых ν течет практически поперек потока. Заметим, что в аналитическом расчете стационарного течения [10], который выполнен в постановке задачи, близкой к настоящей (но при $\nu \ll \delta^2$, тогда как здесь и в [8] $\nu \gg \delta/\sqrt{\beta}$; $\beta \ll 1$), ничего не сказано о существовании каких-либо запретных зон значений ξ . Это косвенным образом согласуется с нашим заключением.

Список литературы

- [1] *Брушлинский К.В., Морозов А.И.* // Вопросы теории плазмы. В. 8. М., 1974. С. 88-163.
- [2] *Алексеева Л.М.* // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 10. С. 1-4.
- [3] *Алексеева Л.М.* // ДАН СССР. 1990. Т. 310. В. 3. С. 567-571.
- [4] *Алексеева Л.М.* // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. В. 3. С. 34-38.
- [5] *Алексеева Л.М.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 2. С. 64-73.
- [6] *Алексеева Л.М.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 2. С. 74-83.
- [7] *Алексеева Л.М.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 13. С. 6-10.
- [8] *Алексеева Л.М.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. В. 5. С. 1-8.
- [9] *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* // ЖТФ. 1964. Т. 34. В. 7. С. 1141-1153.
- [10] *Морозов А.И., Шубин А.П.* // ТВТ. 1965. Т. 3. В. 6. С. 826-837.

Научно-исследовательский институт
ядерной физики

Московского государственного университета
им. М.В.Ломоносова

Поступило в Редакцию
28 февраля 1994 г.