01;05.1

ДИНАМИКА ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОВОРОТОВ В СРЕДЕ С ДИСЛОКАЦИЯМИ И ДИСКЛИНАЦИЯМИ

В.Л.Попов

В предыдущей работе [1] было показано, что в упругопластической среде с дислокациями оказывается возможным такое специфическое явление как "волны пластических поворотов". Физической причиной этих волн являются моментные напряжения, возникающие при введении в среду с микроструктурой градиента пластического поворота (изгиба-кручения) [2]. Если допустить в среде рождение дисклинаций, то появится возможность релаксации моментных напряжений, что существенно повлияет на динамику пластических поворотов.

С математической точки зрения модель среды с дислокациями строится как калибровочное расширение теории упругости, причем в качестве калибровочной группы используется локализованная группа трансляций [3,5]. Аналогичным образом модель среды с дисклинациями может строиться как дальнейшее калибровочное расширение модели путем включения в нее локализованной группы поворотов. Покажем, каким образом это делается для сокращенного низкочастотного описания.

В [1] было показано, что низкочастотная динамика пластических поворотов может строиться на основе лагранжиана

$$L = \int dV \left[B\dot{\mathbf{\Omega}}^2 - \frac{C}{2}\left(\varkappa_{km}\varkappa_{km} + \varkappa_{ii}\varkappa_{jj}\right)\right], \qquad (1)$$

где $\mathbf{\Omega}$ — вектор пластического поворота (псевдовектор, соответствующий антисимметричной части тензора пластической дисторсии), а

$$\varkappa_{ki} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} - \qquad (2)$$

тензор изгиба-кручения. В контексте данной статьи тензор (2) мы должны, следуя [2], рассматривать как тензор упругого изгиба-кручения. Константы B и C могут быть представлены в виде

$$B = \rho l_1^2, \qquad C = \mu l_2^2, \qquad (3)$$

где ρ — плотность среды, μ — модуль сдвига, а l_1 и l_2 — два характерных пространственных масштаба среды (можно показать, что l_1 и l_2 связаны с такими параметрами пластического поведения среды, как размер зоны сдвига и среднее расстояние между зонами сдвига).

Лагранжиан (1) инвариантен относительно преобразования

$$\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^{(0)}, \tag{4}$$

где $\mathbf{\Omega}^{(0)}$ не зависит от координат и времени. Допущение рождения дисклинаций в среде эквивалентно предположению об инвариантности среды по отношению к преобразованию (4) также и в случае зависящего от координат вектора $\mathbf{\Omega}^{(0)}(\mathbf{x})$. По общим правилам построения калибровочного расширения лагранжиана необходимо в (1) заменить производную $\partial\Omega_1/\partial x_k$ на удлиненную производную

$$\partial\Omega_i/\partial x_k \to \partial\Omega_i/\partial x_k - \varkappa^{pl}_{ki}, \tag{5}$$

где $\varkappa^{pl}_{ki}$ — компенсирующее поле, имеющее в данном случае смысл пластического изгиба-кручения. Законы преобразования полей Ω_i и $\varkappa^{pl}_{ki}$ определяется формулами

$$\Omega_i' = \Omega_i + \Omega_i^{(0)}(\mathbf{x}), \tag{6}$$

$$\left(\varkappa^{pl}_{ki}\right)' = \varkappa^{pl}_{ki} + \frac{\partial\Omega^{(0)_i}}{\partial x_k},$$

обеспечивающими инвариантность калибровочной производной (5).

Для получения полного лагранжиана помимо замены (5) в (1) необходимо ввести в рассмотрение дополнительный лагранжиан, описывающий энергию калибровочного поля. Его вид (в квадратичном приближении) однозначно определяется требованием калибровочной инвариантности:

$$L' = \int dV \left[\frac{\Gamma}{2}\dot{\varkappa}^{pl}_{km}\dot{\varkappa}^{pl}_{km} - \frac{\Pi}{2}\theta_{ij}\theta_{ij}\right], \tag{7}$$

где

$$\theta_{kj} = -e_{kli}\frac{\partial\varkappa^{pl}_{ij}}{\partial x_l} \tag{8}$$

— напряженность калибровочного поля, имеющая физический смысл тензора плотности дисклинаций, а $\dot{\varkappa}_{km}$ — тензор плотности потока дисклинаций. Константы Γ и Π, характеризующие пластические свойства среды, связанные с движением дисклинаций, аналогично (3), могут быть представлены в виде

$$\Gamma = Bl_3^2, \qquad \Pi = Cl_4^2, \tag{9}$$

где l_3 и l_4 — пространственные масштабы, характеризующие дисклинационную структуру.

Для описания диссипации энергии введем также калибровочно-инвариантную диссипативную функцию

$$R = \int dV \left(2\eta\dot{\mathbf{\Omega}}^2 + \psi \dot{\varkappa}_{km}^{pl} \dot{\varkappa}_{km}^{pl}\right), \tag{10}$$

где η — коэффициент динамической вязкости среды, а ψ — коэффициент, определяющий диссипативные свойства дисклинаций.

Низкочастотная динамика построенной системы может быть найдена уже на основании одних только требований калибровочной инвариантности. Действительно, каково бы ни было распределение пластических поворотов $\Omega_i(x)$ в среде, всегда можно найти такое компенсирующее поле

$$\varkappa_{ki}^{pl} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}, \tag{11}$$

что удлиненная производная (5), а вместе с ней и потенциальная энергия, связанная с изгибом-кручением, обратятся в нуль. При этом $\Theta_y \equiv 0$, так что энергия, связанная с дисклинациями, также отсутствует. Это означает, что в низкочастотном пределе тензор пластического изгиба-кручения, стремясь минимизировать энергию системы, "подстраивается" к мгновенному значению тензора, и мы можем, пользуясь (11), записать лагранжиан и диссипативную функцию в терминах одних только пластических поворотов:

$$L = \int B\dot{\mathbf{\Omega}}^2 dV, \tag{12}$$

$$R = \int dV \left[2\eta\dot{\mathbf{\Omega}}^2 + \psi \frac{\partial \dot{\Omega}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \dot{\Omega}_i}{\partial x_k}\right]. \tag{13}$$

Уравнения движения, вытекающие из этих лагранжиана и диссипативной функции, имеют вид

$$B\ddot{\mathbf{\Omega}} + 2\eta\dot{\mathbf{\Omega}} - \psi\Delta\dot{\mathbf{\Omega}} = 0. \tag{14}$$

Дисперсионное соотношение уравнения (14) есть

$$R^2 = \frac{iB\omega - 2\eta}{\psi}. \tag{15}$$

При малых частотах

$$\omega \ll \frac{\eta}{B} \tag{16}$$

оно описывает эффект "непропускания" волн на расстояния $l > \sqrt{\frac{\psi}{2\eta}}$ ("скин-эффект" для пластических поворотов).

Таким образом, нами показано, что включение дисклинационной динамики приводит к "смягчению" акустических ветвей, описывающих волны пластических поворотов и к "скин-эффекту" для волн пластических поворотов. Полученные результаты могут быть использованы для обобщения многочисленных экспериментальных данных по возникновению разориентировок в поверхностных слоях при ударных и трибологических воздействиях.

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда Сороса.

Список литературы

[1] *Попов В.Л.* // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. В. 14. С. 80–82.
[2] *Попов В.Л.* // Изв. вузов. Физика. 1994. В печати.
[3] *Edelen D.G.B., Lagoudas D.C.* // Gauge theory and defects in solids. Amsterdam: North-Holland, 1988.
[4] *Popov V.L.* // Int. J. Engn. Sci. 1992. V. 30. N 3. P. 329–334.
[5] *Попов В.Л., Чертова Н.В.* // Изв. вузов. Физика. 1992. Т. 35. В. 4. С. 81–93.

Институт физики прочности
и материаловедения
СО РАН

Поступило в Редакцию
12 апреля 1994 г.