Письма в ЖТФ, том 20, вып. 17 12 сентября 1994 г.

01;07

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В.П.Лукомский

Исследования распространения стационарных импульсов в нелинейных средах с пространственной модуляцией параметров в последние годы проводятся достаточно интенсивно в связи с использованием таких структур для формирования оптических импульсов фемтосекундной длительности, а также в линиях волоконно-оптической связи. Само существование уединенных волн на частоте брегговского резонанса впервые было установлено в работе [1]. Затем был исследован более широкий класс солитонных решений с экспоненциальным убыванием на частотах в пределах всей запрещенной брегговской зоны [2–5]. Внезонные солитоны исследовались только в приближении спектрально узких волновых пакетов в рамках нелинейного уравнения Шредингера (NSE). Недавно [6] была предпринята попытка в рамках единого подхода исследовать солитонные решения во всей частотной области без использования указанного приближения. Однако из-за методической ошибки был сделан неправильный вывод, что при взаимодействии встречных мод вне запрещенной зоны возможны только уединенные волны с ненулевыми амплитудами на бесконечности. Взаимодействие однонаправленных мод в условиях фазового синхронизма в связи с образованием солитонов рассматривалось в [7,8].

В настоящем сообщении при исследовании нелинейного взаимодействия как встречных, так и попутных волн в периодических структурах, впервые представлены точные аналитические решения в виде уединенных волн алгебраического типа, огибающая которых имеет степенное убывание и исчезает на бесконечности. Установлены условия существования таких волн, выполнены необходимые предельные переходы, обсуждается возможность их практического использования.

Будем рассматривать электромагнитные волны в нелинейном волоконном световоде с показателем преломления, гармонически модулированным по длине [6]:

$$n(z,E) = n_0 + n_1\cos(2k_B z) + n_2|E|^2, \qquad (1)$$

где n_0 — показатель немодулированного волновода, n_1 — глубина модуляции ($n_1 \ll n_0$), n_2 — коэффициент нелинейности, $k_B = \frac{\pi}{L}$ — пространственный период модуляции. При учете только дисперсии первого порядка (межмодовая расстройка групповых скоростей) исследуем два наиболее типичных случая.

1. Встречное взаимодействие. Пространственный период модуляции $L^{(1)}$ сравним с длиной волны нормальной моды волновода на несущей частоте пакета. Вблизи брэгговского резонанса ($\omega_B = v_0 k_B$, $v_0 = \frac{c}{n_c}$, c — скорость света в вакууме) эффективно взаимодействуют прямая и обратная волны. Решение волнового уравнения в этом случае должно быть представлено в виде их суперпозиции с медленно меняющимися амплитудами

$$E(z,t) = E_1(z,t)\exp\left[-i\omega_B\left(t-\frac{z}{v_0}\right)\right] + E_2(z,t)\exp\times$$
$$\times\left[-i\omega_B\left(t+\frac{z}{v_0}\right)\right] + c.c. \tag{2}$$

Расстройка $\Omega = \omega - \omega_B$ центральной частоты пакета, а также его спектральная ширина предполагаются малыми по сравнению с ω_B и включены в медленные зависимости $E_{1,2}(z,t)$.

2. Попутное взаимодействие. Период модуляции $L^{(2)} \gg L^{(1)}$ обусловливает эффективное взаимодействие двух попутных нормальных мод волновода с близкими групповыми скоростями v_1 и v_2, ($|v_1 - v_2| \ll v_{1,2}$) на центральной частоте $\omega_B = v_1 k_1 = v_2 k_2$. Условие брэгговского синхронизма имеет вид: $\omega_B = v_0 k_B$, $v_0^{-1} = \frac{1}{2}(v_1^{-1} - v_2^{-1})$. Решение в виде суперпозиции двух волн с медленными комплексными амплитудами в этом случае удобно представить в виде

$$E = E_1(z,t)\exp\left[-i\omega_B\left(t-\nu_{a0}^{(+)}z\right)\right] +$$
$$+E_2(z,t)\exp\left[-i\omega_B(t-\nu_{a0}^{(-)})\right] + c.c., \tag{3}$$

$$\nu_{a0}^{(\pm)} = v_a^{-1} \pm v_0^{-1}, \qquad v_a^{-1} = \frac{1}{2}\left(v_1^{-1}+v_2^{-1}\right),$$
$$v_0^{-1} = \frac{1}{2}\left(v_1^{-1}-v_2^{-1}\right). \tag{4}$$

В результате система уравнений для комплексных амплитуд $E_{1,2}(z,t)$ для обоих случаев может быть представлена единым образом

$$i\left(\frac{\partial E_1}{\partial z}+\frac{1}{v_0}\frac{\partial E_1}{\partial t}\right) + \beta E_2 + \gamma\left(|E_1|^2 + 2|E_2|^2\right)E_1 = 0; \tag{5}$$

$$\mp i\left(\frac{\partial E_2}{\partial z}-\frac{1}{v_0}\frac{\partial E_2}{\partial t}\right)+\beta E_1+\gamma\left(|E_2|^2+2|E_1|^2\right)E_2=0. \quad (6)$$

где $\beta=\frac{n_1}{2n_0}k_B$ — полуширина брэгговской щели, $\gamma=\frac{n_2}{n_0}k_B$ — коэффициент, описывающий самомодуляцию и кроссмодуляцию мод. Как известно из [9], решения линеаризованной системы (5), (6) есть плоские волны с законом дисперсии:

$$(\omega-\omega_B)^2=v_0^2\left[(k-k_B)^2\pm\beta^2\right]. \quad (7)$$

В уравнениях (6), (7) и далее верхний и нижний знаки относятся соответственно к первому и второму случаям. Видно, что при взаимодействии встречных волн в области частот $|\omega-\omega_B|<v_0\beta$ образуется полоса непропускания, в то же время при попутном взаимодействии ни при каких частотах не существует волн с постоянными распространения из области $|k-k_B|<\beta$.

В настоящем сообщении мы представляем 3-параметрическое семейство решений нелинейной системы (5), (6) в виде уединенных волн со степенным убыванием амплитуды на бесконечности

$$E_{1,2}(z,t)=A_{1,2}(\tau_s)\exp\left\{-i\left[\Omega\tau_c+\Phi_{1,2}(\tau_s)\right]\right\}; \quad (8)$$

$$A_{1,2}(\tau_s)=A_{01,2}\left(1+\Omega_0^2\tau_s^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\Phi_{1,2}(\tau_s)=\Phi_{01,2}\mathrm{arctg}(\Omega_0\tau_s)+\Phi_0, \quad (9)$$

где введены обозначения соответственно для случаев 1 и 2:

$$\tau_{s,c}=t-t_0-\frac{z}{v_{s,c}},$$

$$\tau_{s,c}=t-t_0-\left(v_a^{-1}+v_{s,c}^{-1}\right)z, \quad v_{s,c}>0.$$

Подстановка решения (8) в систему (5), (6) приводит к семи алгебраическим соотношениям для восьми параметров: Ω, Ω_0; v_s, v_c; $A_{01,2}$, $\Phi_{01,2}$. Если в качестве независимого параметра выбрать безразмерную расстройку $\delta=\frac{|\Omega|}{\beta_{v_0}}$, для остальных получаем

$$\Omega_0=2v_0\beta\cdot\mathrm{sgn}(\Omega)\cdot\left(\delta^2\gamma 1\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

$$v_c=v_0\delta\left(\delta^2\mp 1\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad v_sv_c=v_0^2,$$

$$A_{01}^2 = -\frac{8\beta q}{\gamma}\left(q^4+4q^2+1\right)^{-1},$$

$$q = \pm\mathrm{sgn}(\Omega)\cdot\left(\sqrt{\delta^2 \mp 1+\delta}\right)^{-1}; \qquad (11)$$

$$A_{02} = qA_{01}, \qquad \Phi_{01} = \frac{q^4-4q^2-3}{q^4+4q^2+1}, \qquad \Phi_{02} = \Phi_{01}+2. \quad (12)$$

Для распределения интенсивности в сечении $z = \mathrm{const}$ имеем

$$|E(z,t)|^2 = \frac{A_{01}^2}{1+\Omega_0^2\tau_s^2}\left[1+q^2+2q\cos 2\left(k_B z+\mathrm{arctg}(\Omega_0\tau_s)\right)\right]. \qquad (13)$$

В первом случае из (10)–(12) следует, что уединенная волна (8) существует только при $\Omega\gamma < 0$ и только на частотах вне брэгговской зоны ($\delta \geqslant 1$). С помощью уравнения (7) можно показать, что $v_s = \frac{d\omega}{dk}|_{\omega_B} + \Omega$, т.е. солитон движется точно с групповой скоростью волнового пакета малой амплитуды. В пределе $\delta \to 1$ он становится нераспространяющимся ($v_s \to 0$, $v_c \to \infty$, $q \to -1$). Амплитуды прямой и обратной волн равны по величине и противоположны по знаку: $A_{10} = -A_{20} = |\frac{2n_1\omega_B}{3c\gamma}|^{\frac{1}{2}}$. Распределение модуля интенсивности электрического поля с максимумом в точке $z = 0$, согласно (13), есть

$$|E(z)| = \frac{2A_{10}}{1+(2\beta k_B z)^2}|\sin k_B z - (2\beta k_B z)\cos k_B z|. \qquad (14)$$

Во втором случае аналогичный анализ показывает, что решения вида (8) существуют только при $\Omega\gamma > 0$ при любых расстройках ($\delta \geqslant 0$). В предельном случае точного брэгговского синхронизма на центральной частоте ($\delta = 0$) имеем: $q = -1$, $v_c = 0$, $v_s = \infty$, $A_{01} = -A_{02} = |\frac{n_1\omega_B}{3n_0\gamma\nu_{12}^{(-)}}|^{\frac{1}{2}}$

$$|E(z,t)| = \frac{2A_{01}}{1+\tau_0^{-2}\tau^2}|\sin k_B z - \frac{\tau}{\tau_0}\cos k_B z|, \qquad (15)$$

где $\tau = t - t_0 - \frac{z}{v_a}$, $\tau_0 = \frac{n_0}{n_1\omega_B}$, $v_{12}^{(-)} = v_1^{-1} - v_2^{-1}$.

Особенность этого результата заключается в том, что на частоте брэгговского синхронизма амплитуда солитона $\sim |v_2 - v_1|^{\frac{1}{2}}$ и стремится к нулю при исчезновении межмодовой дисперсии первого порядка, а его длительность при этом остается конечной величиной. Оевидно, что здесь необходим более полный учет дисперсионных эффектов. Тем не менее полученный результат показывает, что при достаточно большой глубине модуляции в нелинейном световоде на эффекте попутного взаимодействия мод с близкими групповыми скоростями может быть получено очень большое сжатие оптических импульсов.

Полученные критерии существования уединенных волн в обоих случаях прямо противоположны условиям существования солитонов NSE. Как известно, это уравнение описывает эволюцию длинных импульсов и для существования у него солитонных решений при заданной нелинейности определяется знаком локальной кривизны дисперсионной кривой (7) на несущей частоте. Сравнение решений NSE [4] с точными решениями системы (5), (6) обнаруживает еще один критерий применимости NSE, а именно: $|q| \ll 1$, который определяет правомерность перехода к одномодовому приближению в окрестности критических точек дисперсионной кривой даже для спектрально узких волновых пакетов. С другой стороны, алгебраические солитоны представляют собой суперпозицию полей двух мод с приблизительно одинаковым вкладом. Отсюда вытекают и условия их возбуждения: начальное условие должно представлять собой определенным образом сфазированный короткий импульс со степенным убыванием амплитуды огибающей. Это подтверждается также и исследованием начального этапа эволюции импульса при зваимодействии попутных мод [8], где имела место сильная зависимость от структуры начальных условий. Кроме алгебраических солитонов, в рамках модельной системы (5), (6) вне брэгговской запрещенной зоны нами найдены также уединенные волны более общего вида, и описанные здесь алгебраические солитоны, как и солитоны NSE, являются их различными предельными состояниями.

Список литературы

[1] *Волощенко Ю.И., Рыжов Ю.Н., Сотин В.Е.* // ЖТФ. 1981. Т. 51. В. 5. С. 903–907.

[2] *Sipe J.E., Winful H.G.* // Opt. Lett. 1988. V. 13. N 2. P. 132–133.

[3] *Christodoulides D.N., Joseph R.L.* // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. N 15. P. 1746–1749.

[4] *Martin de Sterke C., Sipe J.E.* // Phys. Rev. A. 1990. V. 42. N 1. P. 550–555.

[5] *Martin de Sterke C., Sipe J.E.* // Phys. Rew. A. 1991. V. 43. N 5. P. 2467–2473.

[6] *Feng J., Kneubuhl F.K.* // IEEE J. Quant. Electr. 1993. V. 29. N 2. P. 590–597.

[7] *Wabnits S.* // Opt. Lett. 1989. V. 14. N 19. P. 1071–1073.
[8] *Выслоух В.А., Геворкян Л.П.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1991. Т. 55. В. 2. С. 322–328.
[9] *Карпов С.Ю., Столяров С.Н.* // УФН. 1993. Т. 163. В. 1. С. 63–89.

Поступило в Редакцию
27 марта 1994 г.