Письма в ЖТФ, том 20, вып. 18 26 сентября 1994 г.

01;03

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПОРШНЕ В РАВНОВЕСНОЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ

В.Г.Ковалев

В [1] приведено решение автомодельной задачи расширения сферического поршня полости в равновесной газожидкостной смеси. Рассмотрим аналогичным образом задачу расширения цилиндрического поршня.

Вводим следующие безразмерные величины:

$$\bar{v} = \frac{v}{c_0}; \bar{p} = \frac{p}{p_0}; \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}; \lambda = \frac{r}{c_0 t}; \tag{1}$$

где v — скорость движения среды; p и ρ — давление и плотность смеси; p_0 — невозмущенное давление; r — радиальная координата; t — время;

$$\rho_0 = (1-\varepsilon_0)\rho_1 + \varepsilon_0\rho_2; \quad c_0^2 = \frac{p_0}{\rho_1\varepsilon_0(-\varepsilon_0)};$$

ε_0 — начальная объемная концентрация газа; ρ_1 и ρ_2 — плотности жидкой и газовой компонент.

Из условий на фронте возмущения

$$\rho_0 D = \rho_f (D - v_f), p_f - p_0 = \rho_0 D v_f,$$

где D — скорость распространения скачка, с учетом уравнения состояния $p = \frac{\varepsilon_0 p_0}{1-\varepsilon_0}\frac{\rho}{\rho_1-\rho}$ можно определить массовую скорость вещества v_f и скорость скачка D через давление за скачком

$$v_f = \frac{p_f - p_0}{\sqrt{p_f}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\rho_0}}, \qquad D = \sqrt{\frac{p_f}{\rho_0\varepsilon_0}}. \tag{2}$$

Из закона расширения поршня $r = v_p t$ найдем

$$\lambda_p = \frac{v_p}{c_0} = v_p. \tag{3}$$

На фронте справедливо соотношение

$$\lambda_f = \frac{D}{c_0} = \sqrt{\bar{p}_f}. \tag{4}$$

Уравнения неразрывности и движения для цилиндрической симметрии в безразмерных величинах имеют вид [1]:

$$\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{v}{\lambda}, \tag{5}$$

$$(v - \lambda)\frac{dv}{d\lambda} + \varepsilon_0 \frac{dp}{d\lambda} = 0. \tag{6}$$

Интегрируя (5), получим

$$\ln\bar{v} = -\ln\lambda + \ln A_1, \qquad \text{или} \qquad \bar{v}\lambda = A_1, \tag{7}$$

где A_1 — постоянная интегрирования.

Подставив условия на поршне, с учетом (3) найдем

$$A_1 = \bar{v}_p^2.$$

Таким образом, из (7) имеем

$$\bar{v} = \frac{\bar{v}_p^2}{\lambda}. \tag{8}$$

Выражение (8) определяет распределение скоростей между поршнем и фронтом.

Далее, подставив (8) в уравнение (6), получим

$$\varepsilon_0 \frac{d\bar{p}}{d\lambda} = \frac{\bar{v}_p^2}{\lambda^3}\left(v_p^2 - \lambda^2\right).$$

Интегрирование записанного уравнения приводит к выражению

$$\varepsilon_0 \bar{p} = \bar{v}_p^2 \left(A_2 - \ln\lambda - \frac{\bar{v}_p^2}{2\lambda^2}\right), \tag{9}$$

где A_2 — константа интегрирования.

Подставим в (9) условия на фронте $\lambda = \lambda_f$, $p = p_f$, учитывая, что из (4) следует

$$\bar{p}_f = \lambda_f^2.$$

Получим

$$\varepsilon_0 \lambda_f^2 = \bar{v}_p^2 \left(A_2 - \ln\lambda_f - \frac{\bar{v}_p^2}{2\lambda_f^2}\right).$$

Отсюда

$$A_2 = \frac{\varepsilon_0 \lambda_f^2}{\bar{v}_p^2} + \frac{\bar{v}_p^2}{2\lambda_f^2} + \ln \lambda_f. \tag{10}$$

Теперь распределение давления (9) с учетом (10) примет вид

$$\bar{p} = \frac{\bar{v}_p^2}{\varepsilon_0} \left[\frac{\varepsilon_0 \lambda_f^2}{\bar{v}_p^2} + \frac{\bar{v}_p^2}{2\lambda_f^2} + \ln\left(\frac{\lambda_f}{\lambda}\right) - \frac{\bar{v}_p^2}{2\lambda^2} \right]. \tag{11}$$

Запишем первое соотношение (2) в безразмерном виде с учетом (4):

$$\bar{v}_f = \frac{\varepsilon_0(\lambda_f^2 - 1)}{\lambda_f}. \tag{12}$$

Поскольку из (8), (12) следует

$$\bar{v}_f = \frac{\bar{v}_p^2}{\lambda_f} = \frac{\varepsilon_0(\lambda_f^2 - 1)}{\lambda_f},$$

получим

$$\lambda_f = \sqrt{\frac{\bar{v}_p^2}{\varepsilon_0} + 1}. \tag{13}$$

Таким образом, выражения (11), (13) описывают автомодельное распределение давлений.

Определим давление на поверхности поршня. Учитывая, что $\lambda_p = \bar{v}_p$, запишем

$$\bar{p}_p = 1 + \frac{\bar{v}_p^4}{2\varepsilon_0 \lambda_f^2} + \frac{\bar{v}_p^2}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\lambda_f}{\bar{v}_p}\right) + \frac{\bar{v}_p^2}{2\varepsilon_0}. \tag{14}$$

Выражение (14) с учетом (13) определяет в безразмерных переменных (1) автомодельное давление на поверхности расширяющегося цилиндрического поршня.

Полученные результаты могут быть использованы, например, при исследовании процесса высоковольтного электрического разряда в двухфазной газожидкостной среде, когда размеры присутствующих в воде пузырьков не превышают 15 мкм и, следовательно, для характерных давлений не ниже 10 МПа время релаксации среды составляет менее 1 мкс. В частности, в [2,3] полученная зависимость давления на поверхности канала от скорости его расширения использована для описания квазиравномерного расширения канала подводного электровзрыва на активной стадии.

Список литературы

[1] *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. II. М.: Наука, 1987. 360 с.

[2] *Бескаравайный Н.М., Ковалев В.Г.* Тез докл. V научно-техн. конф. "Электрический разряд в жидкости и его применение в промышленности". Николаев, 1992. С. 25.

[3] *Ковалев В.Г.* Тез. докл. II Всеросс. семин. по динамике пространственных и неравновесных течений. Челябинск, 1993. С. 58–60.

Поступило в Редакцию
8 мая 1994 г.