

01

©1994

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

С. В. Петровский

Распространение волн переключения в активных диссипативных средах различной физической природы впервые рассматривалось в [1-3]. Подробное исследование волновой динамики активных сред в связи с задачами распространения пламени проведено в [4]. Современное состояние вопроса отражено также в обзоре [5]. В данной работе впервые показано, что при распространении волны переключения в среде с развитой турбулентностью происходит увеличение скорости волны со временем. Получено аналитическое выражение для скорости. Обнаружен эффект стабилизации волны на больших временах — выход на новый автомодельный режим.

Рассмотрим активную среду, описываемую нелинейным уравнением

$$\partial_t u = K \partial_{xx}^2 u + (1/T) f(u), \quad (1)$$

где $u(x, t)$ — функция, описывающая состояние среды (будем считать $u \geq 0$), K — коэффициент диффузии, T — параметр размерности времени, а $f(u)$ — нелинейный источник, описывающий локальную кинетику системы (в дальнейшем называемый кинетической функцией).

В работах [1,2] для кинетической функции

$$f(0) = f(1) = 0, \quad f(u) > 0, \quad 0 < u < 1; \quad (2)$$

$$f'(0) \equiv \alpha > 0, \quad f'(u) < \alpha, \quad 0 < u \leq 1, \quad (3)$$

и начального условия $u(x, 0) = 1, x > 0; u(x, 0) = 0, x < 0$ показано, что в системе формируется стационарная бегущая волна со скоростью

$$v_0 = 2(\alpha K/T)^{1/2}. \quad (4)$$

Для приложений значительно больший интерес представляет поведение системы при начальном условии в виде локализованного возмущения. В этом случае в среде с кинетической функцией (2), (3) независимо от параметров возму-

щения также формируется стационарная волна (в одномерном случае — две волны), распространяющаяся с постоянной скоростью (4). Для бистабильных сред волна переключения возникает только тогда, когда размеры начального возмущения достаточно велики; в противном случае возмущение остается локализованным и амплитуда его убывает со временем [4–6]. Отметим, что для бистабильных сред скорость волны уже не определяется выражением (4).

Во многих конкретных ситуациях перемешивание обусловлено турбулентностью. В этом случае (1) — полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии [7], описывающее, например, турбулентное горение [4]. В данной работе ограничимся случаем локально-изотропной турбулентности [8] в инерционном интервале масштабов $\eta \ll S \ll L$ (где L — внешний масштаб турбулентности, η — колмогоровский микромасштаб), когда единственным определяющим параметром является ε — средняя скорость передачи энергии по спектру. Интенсивность перемешивания, определяемая коэффициентом турбулентной диффузии K , зависит при этом от масштаба явления [9–10]

$$K = \mu \varepsilon^{1/3} S^{4/3}, \quad (5)$$

где μ — безразмерная постоянная.

В задаче о распространении волны переключения от области локализованного начального возмущения естественным масштабом явления является размер возмущенной области

$$S(t) = S_0 + 2 \int_0^t v(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Зависимость коэффициента турбулентной диффузии от масштаба явления приводит таким образом к его зависимости от времени. Волна при этом становится нестационарной и ее скорость изменяется со временем. В том случае, когда кинетика системы ограничена условиями (2), (3), вид функции $v(t)$ может быть найден аналитически.

Действительно, предположим, что выражение (4) остается верным и в случае, когда коэффициент диффузии не является постоянной величиной, например, зависит от масштаба явления S по формуле (5). Из (4), (5), (6) получаем

$$Tv^2/4\alpha = \mu \varepsilon^{1/3} \left[S_0 + 2 \int_0^t v(\tau) d\tau \right]^{4/3}. \quad (7)$$

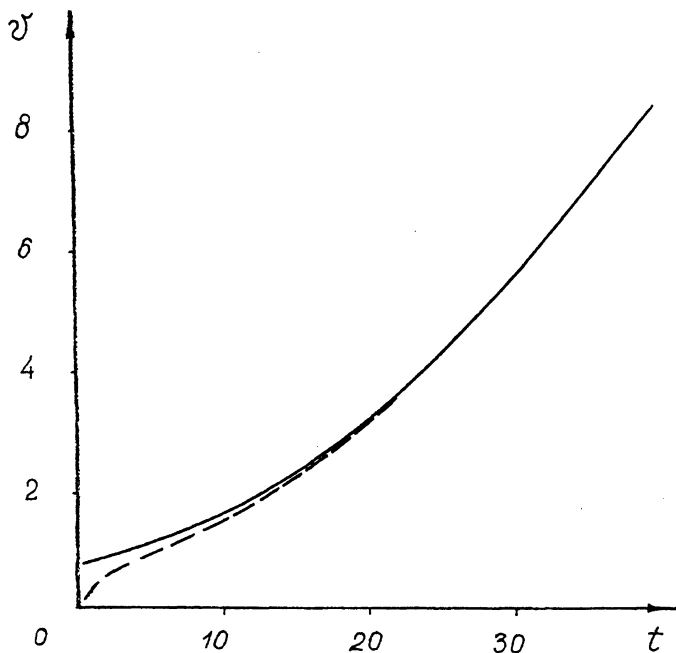


Рис. 1. Зависимость скорости волны от времени (в безразмерных единицах): сплошная кривая — теория, пунктирная — численный эксперимент.

Дифференцируя соотношение (7) по времени и решая получившееся обыкновенное дифференциальное уравнение, имеем

$$v(t) = (\mu^3 \varepsilon T)^{1/2} [A(t/T) + C]^2, \quad (8)$$

где $A = (2/3)(4\alpha)^{3/4}$ и $C = (4\alpha K_0 / \mu^3 \varepsilon T^2)^{1/4}$, где $K_0 = \mu \varepsilon^{1/3} S_0^{4/3}$.

Справедливость выражения (8) подтверждена результатами численных экспериментов (см. рис. 1). Уравнение (1) в безразмерных переменных $x' = x/S_0$, $t' = t/T$ с кинетической функцией $f(u) = u - u^2$ решалось конечно-разностным способом. За положение фронта волны принималось значение координаты $x_{1/2}(t)$, для которой величина $u(x_{1/2}, t)$ в данный момент времени составляет половину амплитуды волны. Пунктирной кривой на рис. 1 показана зависимость скорости волны от времени, определенная путем численного дифференцирования функции $x_{1/2}(t)$; сплошная кривая соответствует выражению (8).

Заметим, что формула (8) для скорости волны получена для случая, когда кинетическая функция $f(u)$ удовлетворяет условиям (2), (3), и скорость волны определяется выражением (4). Однако основываясь на результатах численного решения исходного уравнения (1) для различных видов $f(u)$, можно утверждать, что квадратичный характер зависимости скорости волны от времени является более общим фактом. Это может иметь место и для бистабильных сред, когда $\alpha = f'(0) < 0$, и формула (4) заведомо не верна.

Квадратичный характер зависимости $v(t)$ приводит к эффекту стабилизации волны на больших временах — выходу на новый автомодельный режим. Действительно, перейдем в уравнении (1) в координаты бегущей волны ($\xi = x - \int_0^t v(\tau) d\tau, t$) и рассмотрим процесс для достаточно больших времен, когда $v(t) \simeq at^2$ и $S_0 \ll S \ll L$, т.е.

$$K(t) \simeq \mu \varepsilon^{1/3} \left[2 \int_0^t v(\tau) d\tau \right]^{4/3} = [\mu \varepsilon^{1/3} (a/3)^{4/3}] t^4 \equiv bt^4.$$

Уравнение (1) принимает вид

$$\partial_t u - at^2 \partial_\xi u = bt^4 \partial_{\xi\xi}^2 u + f(u). \quad (9)$$

Вводя новые переменные (θ, t) , где $\theta = \xi/t^2$, получаем

$$\partial_t u - (2/t)\theta \partial_\theta u = b \partial_{\theta\theta}^2 u + a \partial_\theta u + f(u). \quad (10)$$

Для интересующих нас здесь решений типа волн переключения слагаемое $(2/t)\theta \partial_\theta u \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и можно ожидать, что решение уравнения (10) перестает зависеть от времени. На рис. 2 приведены результаты численного решения исходной задачи (1)–(3) и (5), (6). Рассчитанные для последовательных равноотстоящих моментов времени профили волны представлены в виде зависимости от автомодельной переменной $\theta = (x - \int_0^t v(\tau) d\tau)/t^2$. Для $t \gtrsim t_4$ отчетливо виден выход на автомодельную асимптотику (*жирная кривая*). Важно отметить, что для локализованного начального возмущения установление автомодельного режима происходит независимо от вида $u(x, 0)$. Для бистабильных сред единственным ограничением здесь является требование достаточно больших размеров и амплитуды начального возмущения [4,6].

В заключение заметим, что формула (8) получена для инерционного диапазона, когда нет выделенного масштаба

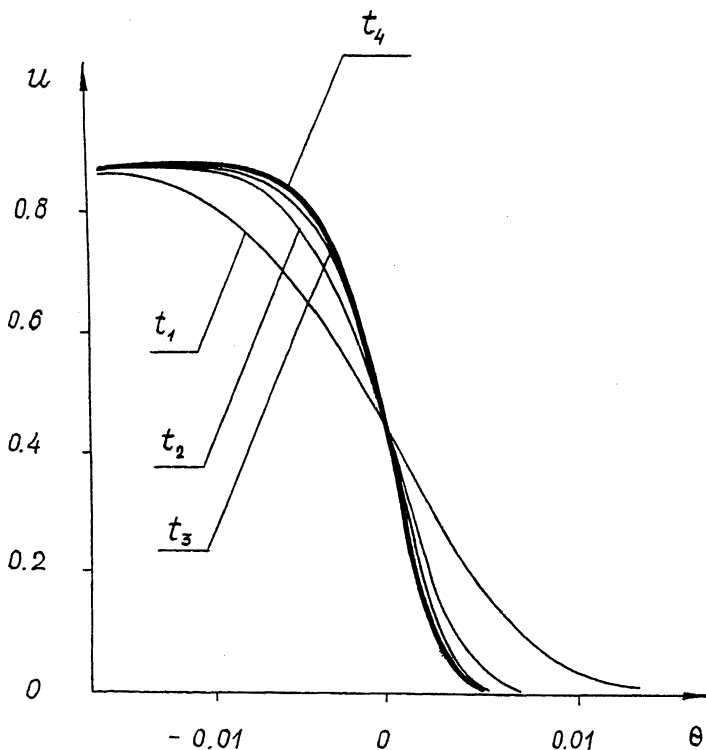


Рис. 2. Профиль волны, рассчитанный в зависимости от автомодельной переменной θ для последовательных моментов времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$; жирная кривая — асимптотика при $t \rightarrow \infty$.

во внутренней структуре турбулентности. В действительности увеличение скорости волны может происходить только до значений $v \sim v_1 = 2(\alpha K_1/T)^{1/2}$, где $K_1 = \mu \varepsilon^{1/3} L^{4/3}$, L — внешний масштаб турбулентности, после чего волна становится стационарной.

Автор выражает благодарность П.Л. Ваньяну за обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, код проекта 93-05-14113.

Список литературы

- [1] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. // Бюл. МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1. В. 6. С. 1-26.
- [2] Fischer R. // Ann. of Eugenics. 1937. V. 7. P. 355-369.
- [3] Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А. // Журнал физической химии. 1938. Т. 12. В. 1. С. 100-105.
- [4] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Магвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М., 1980. 478 с.

- [5] *Вольперт А.И.* В кн.: Петровский И.Г. Избранные труды. М., 1987. С. 333-358.
- [6] *Виноградов М.Е., Баренблат Г.И., Горбунов А.Е., Петровский С.В.* // Докл. РАН. 1993. Т. 328. В. 4. С. 509-512.
- [7] *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М., 1965. 639 с.
- [8] *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. 1941. Т. 30. В. 4. С. 299-303.
- [9] *Озмидов Р.В.* Горизонтальная турбулентность и турбулентный обмен в океане. М., 1968. 200 с.
- [10] *Монин А.С., Озмидов Р.В.* Океанская турбулентность. Л., 1981. 320 с.

Институт океанологии
им. П.П.Ширшова
Москва

Поступило в Редакцию
2 февраля 1994 г.
В окончательной редакции
10 июня 1994 г.