Письма в ЖТФ, том 20, вып. 24 26 декабря 1994 г.

01

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ В КВАНТОВЫХ КОМПЬЮТЕРАХ

А.Ю.Власов

В настоящее время существует постоянная тенденция к размещению все большего числа элементов на единице площади интегральной микросхемы. Предел — это уменьшение элементов компьютера до размеров порядка атомных. При этом квантовый подход к описанию информационно-вычислительных процессов оказывается вполне оправданным [1]. Фейнманом в работе [2] квантовый компьютер был рассмотрен как возможность моделировать физические процессы, квантовые по своей сути. Различные подходы к идее квантовых вычислений даны в работах [3–8,10]. Обзор ранних моделей квантовых компьютеров есть в [9]. В данной работе развит еще один подход. Пример этого подхода будет показан на конкретной задаче.

Рассмотрим представление волновой функции в некотором базисе: $\Psi = \sum\limits_j c_j \Psi_j$ (*случай дискретного спектра*).

Можно рассмотреть набор *ортогональных проекторов*

$$P_j \Psi = c_j \Psi_j; \quad P_j = |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|; \quad P_j^2 = P_j; P_j P_k = 0; \quad (j \neq k). \tag{1}$$

Введем обозначение:

$$P_J = \sum_{j \in J} P; \qquad J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}. \tag{2}$$

Каждый такой оператор является аналогом *машинного слова* компьютера традиционной архитектуры. Это означает, что каждому оператору P_J можно поставить в соответствие двоичный вектор. Наличие единицы в n-й позиции такого вектора означает наличие соответствующего члена в сумме (2). Например, $P_{\{1,3,4,7\}} \equiv P_1 + P_3 + P_4 + P_7 \leftrightarrow (1011001)$.

Множество операторов P_J удовлетворяет всем аксиомам [11] булевой алгебры относительно операций

$$P_J \wedge P_K \equiv P_J P_K = P_{J \frown K}$$

(*логическое* И),

$$\neg P_J \equiv 1 - P_J = P_{\neg J}$$

(*логическое* НЕ),

$$P_J \vee P_K = \neg(\neg P_J \wedge \neg P_K) = P_J + P_K - P_J P_K = P_{J \smile K}$$

(*логическое* ИЛИ).

Достаточно широкое применение в логике имеют операции

$$A \to B = \neg A \wedge B \, (\text{"следует"});$$

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \vee (B \to A) \, (\text{"эквивалентно"}).$$

Важную роль играет симметричная операция $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$, $(A \oplus B) \oplus B = A$

$$P_J \oplus P_K = P_J + P_K - 2P_J P_K = P_{J \cong K}$$

(*логическое* ИСКЛЮЧАЮШЕЕ ИЛИ).

Можно записать

$$P_J \vee P_K = (P_J + P_K)\left(1 - \frac{1}{2} P_J P_K\right);$$

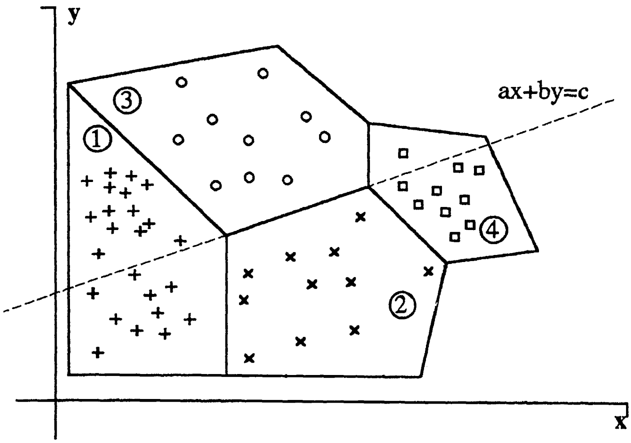
$$P_J \oplus P_K = (P_J + P_K)(1 - P_J P_K) = (P_J - P_K)^2 .$$

Но в то время как выражение $(1 - P_{JP_K})$ соответствует универсальной логической *операции Шефера* $A/B = \neg(A \wedge B)$, для операций $(P_J + P_K)$, $(P_J - P_K)$, и тем более $(1 - \frac{1}{2} P_J P_K)$, нет соответствующих булевских операций. Поэтому возникает вопрос об использовании в квантовых компьютерах операторов более общего вида для обработки и представления информации.

В качестве примера рассмотрим применение семейства коммутирующих операторов вида

$$\hat{A}_k = \sum_i a_{ki} P_i \qquad (3)$$

с общим набором собственных функций $\Psi_{,j}$ для представления информации в экспертной системе (начальное введение в экспертные системы дано в [12]). Предположим, имеется набор параметров какого-либо объекта или процесса. Часто бывает необходимо классифицировать данный объект, т. е. указать, к какой категории относится объект с данным набором характеристик. Пусть каждый конкретный объект



Пример классификации объектов в пространстве двух параметров. x — первый параметр, y — второй параметр. *1, 2, 3, 4* — области, в которых концентрируются точки, соответствующие объектам, относящимся к 1, 2, 3 и 4 категориям соответственно.

обозначен точкой в пространстве параметров. Если данный набор признаков хорошо характеризует объект, то точки, соответствующие объектам одной категории, концентрируются в одной области и не перемешиваются с точками, соответствующими объектам других категорий. Каждую такую область можно аппроксимировать многогранником. Для случая двух параметров подобная операция изображена на рисунке.

Условие того, что данная точка находится внутри многогранника, ограниченного данным набором граней (гиперплоскостей), можно записать в виде системы линейных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n > b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n > b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n < b_m \end{cases} \tag{4}$$

Знак “>” или “<” выбирается в зависимости от того, с какой стороны от грани находится область. В случае двух параметров грани являются отрезками прямых, а области — многоугольниками. На рисунке одна из таких прямых показана пунктиром.

Предположим, что с помощью сдвига начала системы координат и масштабирования мы добились, чтобы все параметры были положительными вещественными числами, меньшими $1/\sqrt{n}$.

Пусть имеется набор операторов (3) и данные представлены в форме

$$\Psi = \sum_{j=0}^{n} c_j \Psi_j; \qquad c_j \bar{c}_j \underset{j \neq 0}{=} x; \qquad c_0 \bar{c}_0 = 1 - \sum x. \tag{5}$$

Среднее значение оператора

$$\bar{A}_k = \langle \Psi | A_k | \Psi \rangle = \sum_{i=0}^{n} c_i a_{ki} \bar{c}_i \underset{a_{k0}=0}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i. \tag{6}$$

Таким образом, средних значений семейства операторов (3) достаточно, чтобы решить задачу классификации объекта, характеристики которого закодированы в формуле (5). Для этого достаточно использовать системы неравенств (4), левые части которых совпадают с выражениями для средних значений (6).

Вышеизложенное имеет аналогию с фактами из области оптических компьютеров. Формулы вида (1) соответствуют спектральному разложению света, а оператору (3) приближенно соответствует фильтр с коэффициентом пропускания, зависящим от длины волны. Необходимо подчеркнуть, что оптический компьютер является частным случаем квантового компьютера, и показать, что более общий подход открывает новые возможности.

Во-первых, наличие дискретного набора собственных значений у операторов в формулах (2) и (3) является достаточно важным условием. Именно использование дискретных значений принесло огромный успех цифровым компьютерам по сравнению с аналоговыми. Оптический аналог описанного выше подхода — это система с несколькими узкими полосами в спектре излучения. Такая система, эквивалентная набору лазеров с разными частотами, удобна как наглядная модель рассматриваемых процессов. Однако с практической точки зрения такая система, по-видимому, не оптимальна.

Во-вторых, оптические компьютеры используют возможности только одного конкретного квантового поля — векторного безмассового поля фотонов.

В-третьих, часто использование идей классической физики в теории оптических компьютеров не позволяет эффективно использовать квантовые свойства микроскопических систем. Так, например, рассмотрение фильтра в качестве аналога оператора (3) не вполне корректно, так как этот оператор самосопряженный, а не унитарный. В то же время оператор, корректно описывающий прохождение света через оптический компьютер является аналогом матрицы рассеяния и должен быть унитарным. В случае фильтра неунитарность означает диссипацию части энергии оптического пучка, что, конечно, не рационально. Поэтому в подобных случаях удобнее выбрать набор унитарных операторов для представления данных, например операторов вида $S_J = 1 - 2P_J$.

Список литературы

[1] *Obermaer K., Teich W.G., Mahler G.* // Phys. Rev. B. 1988. V. 37. N 14. P. 8096–8121.
[2] *Feynmann R.P.,* // Int. J. Theor. Phys. 1982. V. 21. N 6/7. P. 467–488.
[3] *Benioff P.* // Int. Theor. Phys. 1982. V. 21. N 3/4. P. 177–201.
[4] *Feynman R.P.* // Found. Phys. 1986. V. 16. N 6. P. 507–531. (перевод: *Фейман Р.Ф.* // УФН. 1986. Т. 149. В. 4. С. 671–688).
[5] *Deutch D.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1985. V. 400. N 1818. P. 97–117.
[6] *Deutch D.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1989. V. 425. N 1868. P. 73–90.
[7] *Jozsa R.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1991. V. 435. N 1895. P. 563–574.
[8] *Deutch D., Jozsa R.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1992. V. 439. N 1907. P. 553–558.
[9] *Bennet C.H.* // IBM J. Res. Dev. 1988. V. 32. N 1. P. 16–23.
[10] *Bennett C.H.* // Nature. 1993. V. 362. N 6422. P. 694–695.
[11] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М., 1984. 832 с.
[12] *Нейлор К.* Как построить свою экспертную систему. М., 1991. 286 с.

Поступило в Редакцию
26 апреля 1994 г.