Письма в ЖТФ, том 21, вып. 1 12 января 1995 г.

01;05.2;09

ГЕНЕРАЦИЯ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ КОМПОЗИТАХ ВБЛИЗИ ПОРОГА ПРОТЕКАНИЯ

А.А.Снарский

В последнее время наблюдается возрастающий интерес к кинетическим процессам в случайно-неоднородных средах, который в первую очередь связан с их широким практическим применением. При этом основными проблемами являются следующие две. Первая — описание эффективных (усредненных) свойств таких сред по известным локальным свойствам отдельных фаз. Вторая — разработка методов неразрушающего контроля. Этой проблемы в макроскопически-неоднородных средах вблизи порога протекания и касается настоящая публикация.

В работах [1–3] (см. также [4]) показано, что при пропускании через сильнонеоднородную двухфазную пленку переменного тока с частотой ω генерируются гармоники с частотами 3ω, 5ω, $7\omega, \ldots$ Причем амплитуда третьей гармоники прямо пропорциональна амплитуде относительной спектральной плотности (ОСП) $1/f$ шума. Поскольку амплитуда ОСП $1/f$ шума в неоднородных средах связана с четвертым моментом распределения локальных токов, она является важной характеристикой неоднородности системы. Как хорошо извстно [5], у образцов, изготовленных по одной и той же технологии и имеющих близкие значения эффективной проводимости, ОСП $1/f$ шума могут отличаться более чем на порядок, что позволяет использовать эту характеристику как один из методов неразрушающего контроля для отбраковки толстопленочных резисторов.

Ниже будет показана связь между амплитудой третьей гармоники и ОСП $1/f$ шума вблизи порога протекания в общем случае — при конечном отношении удельных сопротивлений фаз $\rho_1/\rho_2 \neq 0$ ($\rho_1/\rho_2 \ll 1$). В частном случае (вторая фаза идеальный изолятор $\rho_2 = \infty$) полученное для области выше порога протекания выражение для амплитуды третьей гармоники совпадает с таковым в работах [2-4]. Будет рассмотрен также отличающийся от двухфазной среды случай, когда распределение удельных сопротивлений среды непрерывно и экспоненциально широко.

Повторим очень кратко в удобных для дальнейшего изложения обозначениях рассуждения [2-4]. Рассмотрим сначала однородный случай. Согласно определению температурного коэффициента сопротивления (ТКС) $\beta = (d\rho/\alpha T)/\rho$, для отклонения $\delta\rho$, связанного с отклонением темпераутры ΔT, можно записать

$$\delta\rho = \beta\rho(T_0)\Delta T, \tag{1}$$

где $\Delta T = T - T_0$ (превышение температуры над температурой окружающей среды T_0) можно представить как в [2-4]:

$$\Delta T \approx \rho(T_0) j^2 h(\omega, T), \tag{2}$$

где $h(\omega, T)$ — некоторая функция, характеризующая отток тепла от разогреваемого джоулевым теплом (ρj^2) образца.

Если к образцу приложено переменное напряжение, так что $j = j_0 \cos\omega t$, то из (1) из учетом (2)

$$\delta\rho = \rho_0^2 \beta h(\omega, T) j_0^2 \cos^2\omega t, \tag{3}$$

где учтено, что при небольших перегревах $\rho \approx \rho_0(1 + \beta\Delta T)$, $\beta\Delta T \ll 1$ и ρ_0 обозначает $\rho = \rho_0(T_0)$.

Рассмотрим теперь случайно-неоднородный образец, характеризующийся удельным эффективным сопротивлением, связывающим по определению средние по объему поля и токи

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \rho_e \langle \mathbf{j} \rangle. \tag{4}$$

Для сред изотропных в среднем существует эквивалентная запись $\rho_e \langle j \rangle^2 = \langle \rho j^2 \rangle$, из которой для $\delta\rho_e$ получаем

$$\delta\rho_e \langle j \rangle^2 = \langle j^2 \delta\rho \rangle. \tag{5}$$

Подставляя сюда (3) и $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cos\omega t$, теперь конечно β и $\mathbf{j}_0$ функции координат, получаем

$$\langle j_0 \rangle^2 \delta\rho_e = \langle \beta \rho_0^2 j_0^4 \rangle > h(\omega, T) \cos^2 \omega t. \tag{6}$$

Согласно (4), $\langle \mathbf{E} \rangle = (\rho_e(T_0) + \delta\rho_e)\langle \mathbf{j} \rangle$, откуда с учетом

$$\langle E \rangle \approx \rho_e(T_0)\langle j_0 \rangle \cos\omega t + \frac{1}{4} h(\omega, T) \frac{\langle \beta \rho_0^2 j_0^4 \rangle}{\langle j_0 \rangle} \cos 3\omega t, \tag{7}$$

где мы пренебрегли малым по сравнению с $\rho_e(T_0)\langle j_0 \rangle$ слагаемым $3\langle \beta \rho_0^2 j_0^4 \rangle h(\omega, T)/4\langle j_0 \rangle$.

Таким образом, амплитуда третьей гармоники E_{3f} пропорциональна

$$E_{3f} \sim \frac{\langle \beta \rho_0^2 j_0^4 \rangle}{\langle j_0 \rangle}. \tag{8}$$

Удобно пользоваться [2–4] нормированной на $\langle j_0 \rangle^3$ характеристикой третьей гармоники

$$B_{3f} = \frac{\langle E \rangle_{3f}}{\langle j_0 \rangle^3} \sim \frac{\langle \beta \rho_0^2 j_0^4 \rangle}{\langle j_0 \rangle^4}. \tag{9}$$

Заметим сразу же, что ОСП $1/f$ шума C_e может быть записана как

$$C_e = \frac{\langle C \rho^2 j^4 \rangle}{\rho_0^2 \langle j \rangle^4}, \tag{10}$$

где $C = C(\mathbf{r})$ — локальная характеристика ОСП $1/f$ шума, в двухфазной среде равная C_1 и C_2 в первой и второй фазах соответственно. Сравнение между собой (9) и (10) показывает, что $\rho_e^2 C_e$ и B_{3f} совпадают друг с другом с точностью до несущественных сомножителей при замене в $C_e C_i$ на β_i.

Воспользуемся теперь известными выражениями для C_e выше ($p > p_C$), ниже ($p < p_C$) порога протекания и в области размазки, где $|p - p_C|/p_C \lesssim \Delta$, ($\Delta = (\rho_1/\rho_2)^{1/(t+q)}$, t и q — критические индексы проводимости выше и ниже порога проводимости соответственно)[6–8]:

$$C_e \approx C_1 \tau^{-k} + C_2 (\rho_1/\rho_2)^2 \tau^{-(k' + 2\varphi)}, \qquad p > p_C; \tag{11}$$

$$C_e \approx C_2 |\tau|^{-k'} + C_1 (\rho_1/\rho_2)^2 \tau^{-(k + 2\varphi)}, \qquad p < p_C; \tag{12}$$

$$C_e \approx C_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{-\frac{k'}{\varphi}} + C_2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{-\frac{k'}{\varphi}} \qquad |p - p_C|/p_C, \tag{13}$$

где $\tau = (p - p_C)/p_C$, $\varphi = t + q$, а k и k' — критические индексы ОСП $1/f$ шума, которые, согласно [7,8], можно выразить через t и q и критический индекс корреляционной длины $\nu : k = 2\nu(d-1) - t$, $k' = 2\nu - q$, d — мерность задачи.

Таким образом, учитывая, что при $p > p_C$ $\rho_e = \rho_1 \tau^{-t}$, при $p < p_c$ $\rho_e = \rho_2 \tau^q$ и в области размазки $\rho_e = (\rho_1^q \rho_2^t)^{1\varphi}$ из (11–13) получаем для B_{3f}

$$B_{3f} \sim \beta_1 \left(\frac{\rho_e}{\rho_1}\right)^{\frac{k}{t}+2} + \beta_2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(\frac{\rho_e}{\rho_1}\right)^{\frac{k'+2\varphi}{t}+2}, \qquad p > p_C \quad (14)$$

$$B_{3f} \sim \beta_2 \left(\frac{\rho_e}{\rho_1}\right)^{-\frac{k'}{q}+2} + \beta_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 \left(\frac{\rho_e}{\rho_2}\right)^{-\frac{k+2\varphi}{q}+2}, \qquad p < p_C \quad (15)$$

$$B_{3f} \sim \beta_1 \left(\frac{\rho_e}{\rho_1 r}\right)^{\frac{k}{t}+2} + \beta_2 \left(\frac{\rho_e}{\rho_1}\right)^{\frac{k'}{t}+2}, \qquad |p - p_c|/p_C \lesssim \Delta. \quad (16)$$

Заметим сразу же, что рассмотренный в работе [4] случай — $p > p_C$, $\rho_2 = \infty$ — соответствует первому слагаемому в (14).

Проанализируем теперь полученные выражения. В зависимости от отношения β_1/β_2 главную роль в (14–16) могут играть как первые, так и вторые слагаемые. При приближении к порогу протекания при $p > p_C$ ρ_e растет, при этом показатель $k/t + 2$, характеризующий связь между B_{3f} и ρ_e меняется на показатель $(k' + 2\varphi)/t + 2$ (14). В двумерном и трехмерном случаях численные значения этих показателей соответственно равны $k_2/t_2 + 2 \approx 3$, $(k_2' + 2\varphi_2)/t_2 + 2 \approx 5.15 + + 2 = 7.15$, $k_3/t_3 + 2 \approx 3$, $(k_3' + 2\varphi_3)/t_3 + 2 \approx 3.6 + 2 = 7.6$. Аналогично, при приближении к порогу протекания при $p < p_C$ ρ_e падает и критическое поведение B_{3f} с показателем — $k'/q + 2$ меняется на поведение с показателем $(k + 2\varphi)/q + 2$. Такая смена критического поведения (кроссовер) аналогична кроссоверу в ОСП $1/f$ шума, который был теоретически предсказан в [6–8] и численно подтвержден в [9,10].

До сих пор рассматривались только двухфазные сильнонеоднородные $(\rho_2/\rho_1 \gg 1)$ среды, в которых функция распределения сопротивлений δ-образна $f(p) = p\delta(\rho - \rho_1) + (1 - - p)\delta(\rho - \rho_2)$.. Не менее интересен и важен случай, когда спектр сопротивлений непрерывен при сохранении большой неоднородности — самые "плохие" сопротивления много больше самых "хороших" [11]. К такому классу сред относятся, в частности толстопленочные резисторы, широко используемые в микроэлектронике (см. обзор [12] и библиографию [13]).

В наиболее известном и простом случае такая среда моделируется как дискретная сетка сопротивлений $R_i = R_0 \exp(-\lambda x)$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, и имеет гладкое распределение. Удельное сопротивление таких сред $\rho_e = A \exp(-\lambda x_C)$ [11], где x_C — некоторая константа порядка единицы, а A — предэкспоненциальный множитель, слабо по сравнению с экспонентой зависящий от $\lambda \gg 1$ — $A \sim \lambda^y$. Согласно [14] $y = \nu(d-2)$, модель слабого звена дает близкое значение $y = (t-q)/2$ [15]. ОСП $1/f$ шума, рассчитанная в рамках модели слабого звена, дает $C_e \sim \exp(-\lambda x_C)\lambda^m$, где m в зависимости от выбранного подхода (подробно см. [15]) дает $m = \nu d$ и $m = (t-q)/2 + 2\nu$. Численные расчеты дают значение, более близкое к первому выражению [16]. Используя эти выражения ρ_e и C_e и пренебрегая предэкспоненциальными множителями, сразу же получаем

$$B_{3f} \sim \rho_e^3. \tag{17}$$

Учет предэкспоненциальных множителей, как легко увидеть, дает поправочный логарифмический по ρ_e сомножитель.

Таким образом, в двух важных классах сильнонеоднородных сред существует степенная связь (причем показатели степени оказываются численно близкими) между амплитудой третьей гармоники и удельным сопротивлением.

Автор признателен И. Ягелю за любезно предоставленные оттиски работ.

Список литературы

[1] *Weissman M.B., Dollinger C.D.* // J. Appl. Phys. 1981. V. 52. P. 3059.
[2] *Dubson M.A., Hui Y.C., Weissman M.B., Garland J.C.* // Phys. Rev. B. 1989. V. 39. P. 6807.
[3] *Yagil Y., Deutscher G.* // Phys. Rev. B. 1992. V. 46. P. 16115.
[4] *Yagil Y., Deutscher G., Bergman D.J.* // Int. J. Mod. Phys., B, 1993. V. 7. P. 3353.
[5] *Коган Ш.М.*, // УФН. 1985. Т. 145. С. 285.
[6] *Tremblay A.-M.S., Fourcade B. // Physica A. 1989. V. 157. P. 89.*
[7] *Морозовский А.Е., Снарский А.А.* // Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 15. С. 51.
[8] *Морозовский А.Е., Снарский А.А.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 1844.
[9] *Kolek A., Kusy A.* // Phys. Rev. B. 1991. V. 43. P. 11274.
[10] *Колек А.* // Phys. Rev. B. 1992. V. 45. P. 205.
[11] *Шкловский Б.И., Эфрос А.Л.* Электронные свойства легированных полупроводников. М., 1979. 414 с.
[12] *Чайковский И.А.* // Микроэлектроника. 1988. Т. 17. С. 291.
[13] *Dziedzic A.* // Microelectron. Reliab. 1991. V. 31. P. 549.

[14] *Le Doussal P.* // Phys. Rev. B. 1989. V. 39. P. 881.
[15] *Морозовский А.Е., Снарский А.А.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. С. 4059.
[16] *Kolek A.* // Privat communication.

Киевский политехнический
институт
Украина

Поступило в Редакцию
30 сентября 1994 г.