

01

©1995

СУПЕРФРАКТАЛИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКОГО АТТРАКТОРА ПРИ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А.А.Кипчатов, Л.В.Красичков

Реальные экспериментально измеренные временные реализации колебательных процессов, как правило, содержат шумы, и фильтрация этих сигналов является важным шагом при подготовке их к анализу. Однако при анализе хаотических колебаний, спектр которых перекрывается со спектром шумов, структура аттракторов колебаний, прошедших через фильтр, оказывается более сложной, чем структура аттрактора исходных колебаний с шумом! Более того, этот эффект сохраняется и в случае, когда фильтруются хаотические колебания без каких-либо шумовых компонентов [1-4]. Механизм такого усложнения до конца не изучен и в настоящее время продолжают попытки найти класс фильтров, оказывающих минимальное влияние на исходные хаотические колебания [5-8]. Анализ трансформации характеристик хаотических колебаний при фильтрации, как правило, проводится на основе оценок корреляционной размерности аттракторов, восстановленных из скалярных временных реализаций. При этом степень усложнения колебаний определяется по степени возрастания их размерности. В настоящей работе анализируется трансформация хаотических аттракторов на основе исследования отображения последования. Для этого рассматриваются хаотические коле-

бания, порождаемые одномерным отображением, и простейшие цифровые фильтры. В результате оказывается возможным выделить два различных механизма усложнения хаотических колебаний, ведущих к высокоразмерному хаосу, и оценить влияние свойств исходного сигнала и линейных фильтров на характеристики результирующих хаотических колебаний.

Для выявления закономерностей изменения структуры аттрактора качественными методами разумно выбрать простейшие хаотические колебания, имеющие наглядное графическое представление аттрактора. А именно колебания, порождаемые квадратичным отображением

$$x_n = 1 - \lambda x_{n-1}^2. \quad (1)$$

При $\lambda = 1.9$, которое будет использоваться в дальнейшем, аттрактор в пространстве (x_n, x_{n+1}) представляет собой хорошо известную квадратичную параболу, почти равномерно заполненную точками.

Дискретная временная последовательность x_n , порождаемая (1), использовалась в качестве входного сигнала цифрового фильтра первого порядка вида [9]

$$z_n = \sum_{k=0}^m b_k x_{n-k} + a z_{n-1}, \quad (2)$$

где x, z — входной и выходной сигналы, m — глубина памяти фильтра о состоянии входного сигнала; b_k и a — коэффициенты, определяющие тип фильтра и его характеристики.

Рассмотрим нерекурсивный фильтр ($m = 1, a = 0, b_0 = 1 - \alpha, b_1 = \alpha$), который записывается в виде

$$z_n = (1 - \alpha)x_n + \alpha x_{n-1}, \quad (3)$$

где $\alpha = e^{-\eta}$ — коэффициент, задающий частоту среза ($0 \leq \alpha < 1$). Фильтр (3) является ФНЧ и переходит в ФВЧ при замене “+” на “-” перед αx_{n-1} . При прохождении хаотических колебаний (1) через нерекурсивный фильтр (3) при $\alpha \neq 0$ аттрактор выходного сигнала претерпевает единственное расслоение (“удвоение”) исходной параболы, величина которого растет с ростом α . Фрагмент расслоенной параболы для $\alpha = e^{5.0} \approx 0.007$ представлен на рис. 1, а. Если выходной сигнал фильтра (3) еще раз профильтровать таким же фильтром, т. е. перейти к цепочке фильтров вида

$$z_{n,i} = (1 - \alpha)z_{n,i-1} + \alpha z_{n-1,i-1}, \quad (4)$$

где $i = 0, \dots, p$ номер фильтра в цепочке, $z_{n,0} = x_n, z_{n-1,0} = x_{n-1}$, и ограничиться лишь двумя звеньями ($p = 1$), то аттрактор выходного сигнала претерпевает еще одно “удвоение” (см. рис. 1, б). Дальнейшее увеличение числа звеньев

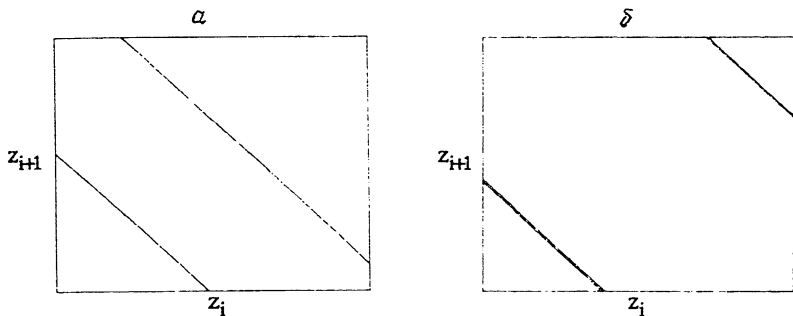


Рис. 1. Отображение последования хаотического сигнала на выходе цепочки нерекурсивных фильтров (4) при $\alpha \approx 0.007$, $p = 1$ (а) и $p = 2$ (б). Результаты, представленные на этом и последующих рисунках, получены для входного хаотического сигнала генерируемого отображения (1) $\lambda = 1.9$.

цепочки приводит к последующим “удвоениям” аттрактора со все меньшей величиной расслоения на каждом звене, и в пределе при $p \rightarrow \infty$ аттрактор приобретает фрактальную структуру, подобную структуре аттрактора отображения Энона в хаотическом режиме. Сама последовательность расслоений при такой фильтрации напоминает процесс построения канторова множества: переход к каждому следующему звену подобен одному шагу исключения среднего участка из инициатора. В дальнейшем мы будем называть образование новой фрактальной структуры при линейном инерционном преобразовании хаотических колебаний *суперфрактализацией*.

Нетрудно показать, что цепочка нерекурсивных фильтров (4) длиной p сводится к нерекурсивному цифровому фильтру вида (2) при $m = p$, $a = 0$, $b_k = C_m^k (1 - \alpha)^{m-k} \alpha^k$, где $C_m^k = m! / (k!(m - k)!)$. При $p \rightarrow \infty$ (4) становится фильтром с бесконечным откликом, а следовательно, обладает памятью о всей предыстории входного сигнала, распределенной вдоль пространства цепочки фильтров.

Бесконечным откликом обладает также рекурсивный фильтр, который получается из (2) при $m = 0$, $b_0 = (1 - \alpha)$, $a = \alpha$:

$$z_n = (1 - \alpha)x_n + \alpha z_{n-1}. \quad (5)$$

Такой фильтр сохраняет информацию не о предыстории входного сигнала, а о своем предыдущем состоянии (неявно обо всех предыдущих состояниях входного сигнала). Фильтр (5) называется также авторегрессионным процессом.

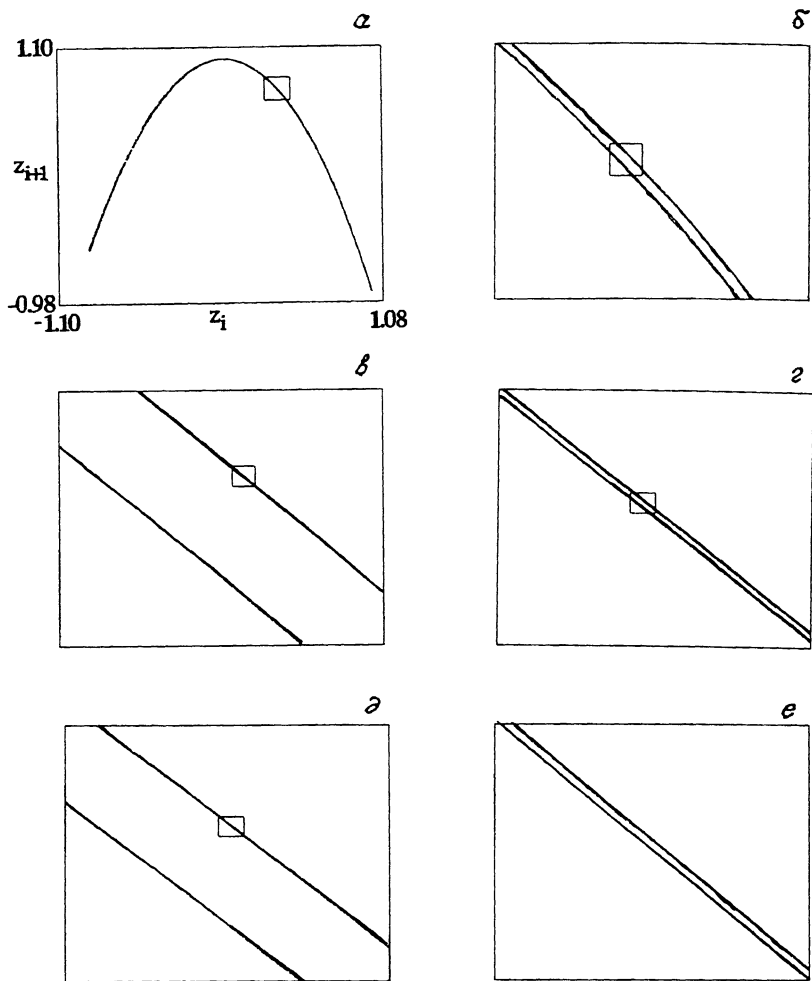


Рис. 2. Отображения последования сигнала на выходе рекурсивного фильтра (5) при $\alpha \approx 0.007$. Каждый последующий рисунок представляет увеличенную область (внутри прямоугольника) с предыдущего.

Отображения последования, построенные для выходного сигнала фильтра (5) при хаотическом воздействии (1), изображенные на рис. 2, демонстрируют, как и следует ожидать, возникновение фрактальной структуры сразу на всех масштабах.

Сравнение результатов для рассмотренных фильтров позволяет сделать ряд выводов.

1) Пространственно распределенная система фильтров вида (4), обладающая пространственной памятью о состоя-

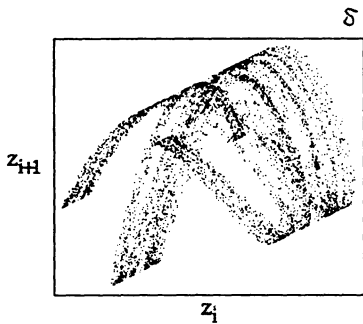
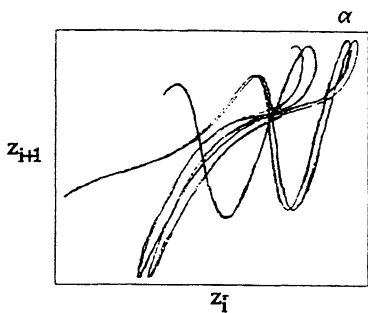


Рис. 3. Отображения последования сигнала на выходе цепочки нерекурсивных фильтров (4) при $\alpha \approx 0.607$, $p = 4$ (а) и для рекурсивного фильтра $\alpha \approx 0.607$ (б).

нии входного сигнала, и сосредоточенный рекурсивный фильтр (5), обладающий временной памятью, оказывают качественно подобное влияние на воздействующий хаотический сигнал, причем глубина усложнения (суперфрактализации) связана с глубиной памяти фильтра о предыдущих состояниях сигнала.

2) Аттрактор, появляющийся при фильтрации хаотических колебаний, обладает фрактальными свойствами и является результатом чисто динамического процесса, не связанного с усилением шумов.

3) Динамическое усложнение хаотических колебаний при линейной фильтрации предопределено динамической природой входного сигнала, так как любые линейные цепи, которыми являются рассмотренные фильтры, не могут породить собственную динамику.

Окончательно на рис. 3 представлены результаты фильтрации хаотических колебаний для больших значений $\alpha = e^{-0.5} \approx 0.607$. Качественная картина для цепочки фильтров (4) при $p = 4$ (рис. 3, а) и для рекурсивного фильтра (5) (рис. 3, б) демонстрирует, что наряду с расслоением аттрактора наблюдается его растяжение и складывание. Это приводит к запутыванию траекторий на больших масштабах наблюдения. Таким образом, можно выделить два пути усложнения хаотических колебаний линейными инерционными цепями.

1) Через суперфрактализацию, когда фильтр обладает слабой, но бесконечно глубокой памятью (α мало, $p \rightarrow \infty$), что ведет к усложнению аттрактора на всех масштабах наблюдения и, естественно, к возрастанию размерности.

2) Через растяжение и складывание аттрактора, когда фильтр обладает сильной, но неглубокой памятью (α ве-

лико, p конечно), что ведет к усложнению аттрактора на больших масштабах наблюдения, а его тонкая структура сохраняется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-02-16171).

Список литературы

- [1] *Badii R., Broggi G., Derighetti B., Ravani M., Ciliberto S., Politi A., Rubio M.A.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. N 11. P. 979-982.
- [2] *Mitschke F., Moller M., Lange W.* // Phys. Rev. A. 1988. V. 37. N 11. P. 4518-4521.
- [3] *Купчатов А.А., Красичков Л.В.* // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. В. 17. С. 68-71.
- [4] *Sauer T., Yorke J.A.* // Int. J. Bifurcations and Chaos. 1993. V. 3. N 3. P. 737-744.
- [5] *Schreiber Th., Grassberger P.* // Phys. Lett. A. 1991. V. 160. N 5. P. 411-418.
- [6] *Hammel S.M.* // Phys. Lett. A. 1990. V. 148. N 8/9. P. 421-428.
- [7] *Hegger R., Schreiber Th.* // Phys. Lett. A. 1992. V. 170. N 4. P. 305-310.
- [8] *Sauer T.* // Physica D. 1992. V. 58. P. 193-201.
- [9] *Отнес Э., Эноксон Л.* // Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982. 428 С.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию
3 ноября 1994 г.