Письма в ЖТФ, том 21, вып. 7 12 апреля 1995 г.

01;07

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ ФОКУСА КОРОТКОФОКУСНОЙ ЛИНЗЫ

Э.А.Тропп, В.Б.Кантор, Л.Б.Проэкт

Настоящая работа посвящена исследованию структуры электромагнитного поля светового пучка со сферическим фронтом вблизи окрестности фокуса. Решение этой задачи моделирует поведение электромагнитной волны, проходящей через линзу без учета сферической аберрации.

Интерес к данной теме был вызван работами по исследованию закономерностей механизмов собственного оптического пробоя стекол [1], проводимыми Л.Б. Глебовым и О.М. Ефимовым. Для правильной интерпретации результатов проводимых авторами этой статьи экспериментов необходима математическая модель, описывающая поведение электромагнитной волны вблизи фокуса оптической системы. Причем геометрия эксперимента такова, что особый интерес представляет короткофокусный случай.

Традиционно считается, что распределение поля вблизи фокуса "идеального" (т. е. безаберрационного) оптического прибора описывается распределением [2]

$$u = ik\frac{V_0^{1/2}R}{a}\int_0^1 \exp(ik\left(R + z\left(1 - \frac{1}{2}p_\rho^2\right)\right) J_0(kp_\rho\rho)p_\rho\, dp_\rho, \quad (1)$$

здесь k — волновое число, R — радиус граничного фронта, a — радиус линзы, z — продольная координата, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, u — декартова компонента электромагнитного поля, ρ — цилиндрический радиус.

Приведенное решение было получено в результате применения принципа Гюйгенса–Френеля. Кроме того, внимательный анализ показывает, что кроме явно сформулированных предположений имеется еще одно ограничение области применимости выражения (1): оно описывает только длиннофокусную оптическую систему. Проще всего убедиться в сказанном, вычислив коротковолновую асимптотику интеграла (1) методом стационарной фазы [3], в результате чего получим

$$u = \frac{R}{az}U_0^{1/2}\exp\left[ik\left(z + \frac{\rho^2}{2z}\right)\right] + o\Big((ik)^{-1}\Big), \quad (2)$$

т.е. $u \approx Ae^{-ikz}w(\rho,z)$, где $w = \exp\left(ik\frac{\rho^2}{2z}\right)$, и видно, что $w(\rho,z)$ — геометрическое приближение решения уравнения Шредингера, которое соответствует длиннофокусному пределу уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0. \tag{3}$$

На языке волновой оптики описать поле идеального оптического прибора — означает получить равномерную асимптотику решения при $ka \to \infty$. Но, как следует из сказанного выше, решение (1) оказывается для этого непригодным. Постараемся построить такую равномерную асимптотику, исключив длиннофокусное приближение.

Предыдущие рассуждения наводят на мысль, что такую асимптотику можно получить в результате регуляризации геометрооптического решения уравнения Гельмгольца. Осуществим эту процедуру, применив метод канонического оператора Маслова [4].

Поставим граничное условие для геометрооптического приближения решения уравнения (3), отвечающее задаче о линзе:

$$u|_\Gamma = U_0^{1/2}\Theta\left[(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} - a\right], \tag{4}$$

где $\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \leqslant 0 \\ 0, & \text{при } x > 0 \end{cases}$, при $z < 0$, а при $z > 0$ Θ тождественно равна нулю. Здесь Γ — сфера радиуса R с центром в начале координат, U_0 — интенсивность электромагнитного поля на фронте, $\alpha = x|_\Gamma$, $\beta = y|_\Gamma$.

Для построения решения этой задачи требуется решить уравнение эйконала

$$(\nabla S)^2 = 1 \tag{5}$$

и уравнение переноса

$$2\nabla\phi_0\nabla S + \phi_0\Delta S = 0. \tag{6}$$

Уравнение (5) решается с начальным условием

$$S|_\Gamma = 0. \tag{7}$$

Задача Коши (5), (7) эквивалентна характеристической системе Гамильтона, решение которой при $z < 0$ имеет вид

$$\begin{cases} p_x = -\frac{\alpha}{R}, & x = \alpha\left(1 - \frac{t}{R}\right), \\ p_y = -\frac{\beta}{R}, & y = \beta\left(1 - \frac{t}{R}\right), \\ p_z = \frac{1}{R}\sqrt{R^2 - (\alpha^2+\beta^2)}, & z = \left(\frac{t}{R} - 1\right)\sqrt{R^2 - (\alpha^2+\beta^2)}, \end{cases} \tag{8}$$

$$S = \int p_i\, dx^i = t = R - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Соотношения (8) определяют лагранжево многообразие, образованное характеристиками $\{x_i(t), p_i(t)\}$, проекция которых на координатное пространство есть геометрические лучи. В соотношении (8) $\{\alpha, \beta, t\}$ образуют лучевую систему координат, α, β "нумеруют" лучи, а t отмечает точку на "выбранном" луче. Решение уравнения переноса (6) имеет вид

$$\phi = \Psi_0(\alpha, \beta) \frac{1}{\sqrt{J}}, \tag{9}$$

где $\Psi_0(\alpha, \beta)$ -- функция, определенная только граничными условиями; $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\alpha,\beta,t)}$. Вычисляя якобиан J на основе соотношений (8), получаем

$$J = \frac{(R-t)^2}{R\sqrt{R^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}}, \tag{10}$$

$$\Psi_0(\alpha, \beta) = \frac{U_0^{1/2}}{\sqrt{R^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \Theta\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - a\right). \tag{11}$$

Так что, с учетом граничных условий, геометрооптическое приближение решения задачи (3)–(4) имеет вид

$$u(x, y, z) =$$

$$= U_0^{1/2} R \frac{\exp\left\{ik\left[R - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right]\right\}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Theta\left(R \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - a\right). \tag{12}$$

Из (10) следует, что цикл особенностей построенного многообразия, т. е. множество точек, неоднозначно проектирующихся на координатное пространство, состоит из единственной точки — фокуса.

Чтобы построить равномерную асимптотику решения, необходимо [4] указать такую гиперплоскость фазового пространства, на которую лагранжево многообразие проектируется диффеоморфно в окрестности фокуса. Такая гиперплоскость задается координатами (p_x, p_y, z). Действительно, $J = \partial(p_x, p_y, z)/\partial(\alpha, \beta, t) = (1/R^3)\sqrt{R^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}$, т. е. нигде не обращается в нуль. Осуществим Фурье-преобразование в уравнении (3) от (x, y, z) к (p_x, p_y, z). Тогда получим

$$-k^2 p_\rho^2 \tilde{u} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + k^2 \tilde{u} = 0. \tag{13}$$

Нетрудно убедиться [4] в том, что решение уравнения (13) для $\tilde{u}$ является Фурье-образом искомой функции u и что оно регулярно при любых значениях своих переменных. Тогда решение уравнения (3) вблизи фокуса представимо в виде обратного Фурье-образа найденного решения (13).

Переход в геометрооптическом решении к переменным (p_x, p_y, z) эквивалентен оценке по методу стационарной фазы [3] преобразования Фурье

$$F_{x\to p_x, y\to p_y}(u) = \iint \phi \exp\Big\{ik(S - \mathbf{p}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho})\Big\}\rho\, d\rho\, d\vartheta =$$

$$= \tilde{\phi}\exp(ik\tilde{S})\Big[1 + o\{(ak)^{-1}\}\Big]. \qquad (14)$$

Применяя метод стационарной фазы, получим следующие соотношения между $\tilde{S}$, $\tilde{\phi}$ и S, ϕ:

$$\tilde{S} = (S - p_\rho \rho\cos\vartheta)|_{d(S-\mathbf{p}_\rho \boldsymbol{\rho})=0} = R + z\sqrt{1 - p_\rho^2}, \qquad (15)$$

$$\tilde{\phi}(p_\rho, z) = \frac{\phi p_\rho}{|\mathrm{Hess}(S - \mathbf{p}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho})|^{1/2}}\Bigg|_{d(S-\mathbf{p}_\rho \boldsymbol{\rho})=0} =$$

$$= U_0^{1/2} R\Theta(R^2 p_\rho^2 - a^2)\frac{z}{1 - p_\rho^2}, \qquad (16)$$

здесь гессиан $\mathrm{Hess}(w) = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2} & \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial\phi} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial\phi} & \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2} \end{vmatrix}$.

Получим регулярное асимптотическое решение уравнения Гельмгольца для волны со сферическим фронтом:

$$u = \frac{U_0^{1/2}}{(ik)^{-1}} R \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{ik\left[R + (z\sqrt{1 - p_\rho^2} + p_\rho\rho\cos\vartheta)\right]\right\}}{\sqrt{1 - p_\rho^2}} \times$$

$$\times\, p_\rho \Theta(R^2 p_\rho^2 - a^2)dp_\rho d\vartheta. \qquad (17)$$

Произведем интегрирование по углу ϑ, получим

$$u = \frac{U_0^{1/2}}{(ik)^{-1}} R \int_0^{a/R} \frac{\exp\left\{ik\left[R + z\sqrt{1 - p_\rho^2}\right]\right\}}{\sqrt{1 - p_\rho^2}} J_0(kp_\rho\rho)p_\rho dp_\rho. \quad (18)$$

Видно, что в длиннофокусном пределе (18) переходит в (1).

Несмотря на то, что примененный выше метод канонического оператора является асимптотическим, полученное решение (18) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3) точно.

Теперь сформулируем краевую задачу, точным решением которой является (18). Для этого запишем (18) в сферической системе координат:

$$u = U_0^{1/2} \exp(ikR)ikR \int\limits_0^{\arcsin(a/R)} \int\limits_0^{2\pi} \exp(i\mathbf{k}_\rho \mathbf{r}) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \tag{19}$$

где $\mathbf{k}_p = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$.

Далее воспользуемся разложением сферической волны по шаровым функциям:

$$\exp(i\mathbf{kr}) = 4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l,m} i^l \frac{J_{l+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}} Y^*_{l,m}\left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right) Y_{l,m}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \tag{20}$$

и представим u в виде суммы двух слагаемых:

$$u = I_1 + I_2, \tag{21}$$

где $I_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \exp(ikR) \sum_l i^l T_l H^{(1)}_{l+1/2}(kr) Y_{l,0}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$ и $I_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \exp(ikR) \sum_l i^l T_l H^{(2)}_{l+1/2}(kr) Y_{l,0}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$, где $Y_{l,m}(x)$ — шаровая функция, $T_l = \int\limits_0^{\pi} Y^*_{l,0}\left(\frac{\mathbf{k}_p}{k}\right) \sin\theta\Theta(R^2\sin^2\theta - a^2) d\theta$.

Из (21) видно, что решение задачи представимо в виде суммы двух волн, одна из которых соответствует падающей, а другая — отраженной. Поэтому поставленную задачу можно трактовать как задачу рассеяния падающей сферической волны на теле бесконечно малого объема. И следовательно, первоначально задачу о линзе можно поставить в виде $u = u^{init} + u^{ref}$, u удовлетворяет уравнению (3) и регулярна вблизи плоскости $z = 0$, а u^{init} задана на бесконечности (при $z < 0$) следующим образом $u^{init} = U_0^{1/2} \frac{\exp(ikr)}{r} \Theta(R\rho/\sqrt{\rho^2 + z^2} - a)$.

В заключение авторы выражают благодарность О.М.Ефимову и С.Г.Пржибельскому, обратившим внимание на рассмотренную выше задачу.

Список литературы

[1] *Ефимов О.М., Глебов Л.Б.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1985. Т. 49. В. 6. С. 1140–1145.

[2] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719 с.

[3] *Гийемин В., Стернин С.* Геометрические асимптотики / Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 500 с.

[4] *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 296 с.

Физико-технический
институт им.А.Ф.Иоффе
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
18 января 1995 г.