

01

©1995

ЭВОЛЮЦИЯ БАССЕЙНОВ ПРИТЯЖЕНИЯ АТТРАКТОРОВ СИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА

Б.П.Безручко, Е.П.Селезнев, Е.В.Смирнов

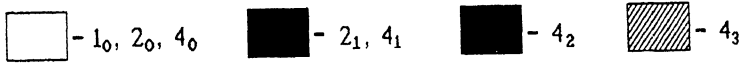
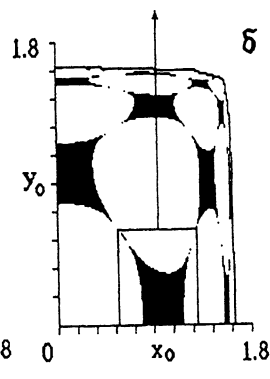
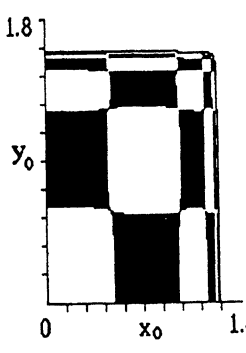
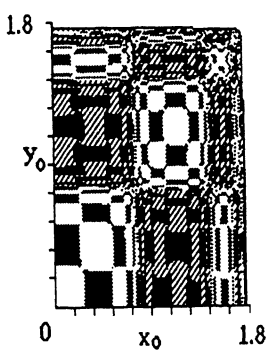
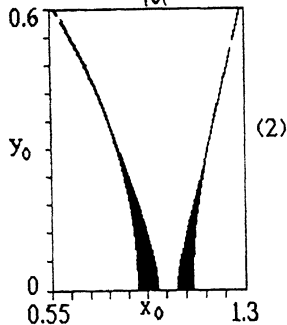
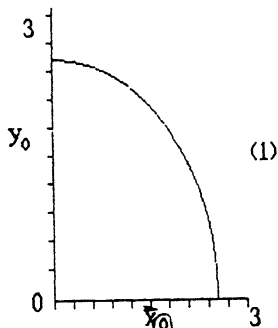
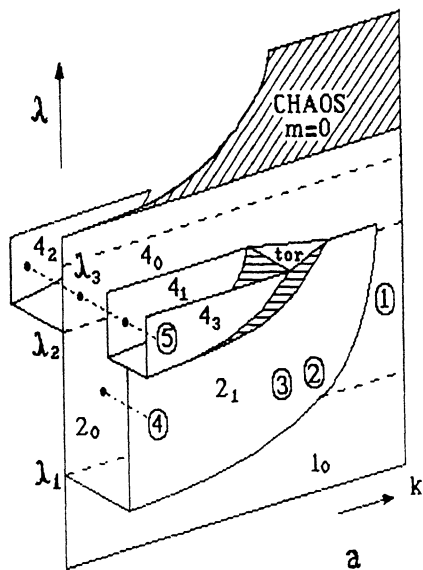
1. При наличии в фазовом пространстве нелинейной динамической системы нескольких сосуществующих аттракторов вид установившегося движения определяется положением начальной точки, — в бассейне притяжения какого из аттракторов она окажется. Если исходная точка расположена вблизи границы бассейнов, однозначное предсказание конечного состояния системы требует определенной точности задания начальных условий. При фрактальной структуре границ такой прогноз может оказаться невозможным даже в отсутствие хаоса [1]. Данные обстоятельства определяют необходимость изучения структуры бассейнов и их эволюции при изменении параметров. Что и делается ниже с помощью физического и численного экспериментов для известной эталонной колебательной системы: два идентичных элемента одинаково действуют друг на друга (симметрично связаны), а каждый из них индивидуально с изменением параметра нелинейности демонстрирует переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода [2,5-7].

Численно исследованы два отображения с диссипативным (в соответствии с классификацией [5]) видом связи:

$$x_{n+1}^2 = \lambda - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2), \quad y_{n+1}^2 = \lambda - y_n^2 + k(y_n^2 - x_n^2), \quad (1)$$

где x_n, y_n — динамические переменные, $n = 0, 1, 2, \dots$ — дискретное время, λ — параметр нелинейности, k — параметр связи. В [6] представлена структура бассейнов притяжения

Рис. 1. Система областей существования различных видов колебаний на плоскости параметров $\lambda - k$ (а) и структура разбиения плоскости x_0, y_0 на бассейны притяжения предельных циклов в отмеченных на схеме точках (б) для модели (1): $\lambda = 0.92, k = 0.5$ — всю область конечных решений занимает цикл 2_0 (1), $k = 0.04853$ (2), $k = 0.046$ (3) и $k = 0.01$ (4) — сосуществуют циклы 2_1 и 2_0 ; $\lambda = 1.3, k = 0.01$ (5) — сосуществуют циклы $4_0, 4_2, 4_1$ и 4_3 . $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — значения λ , при которых происходят бифуркации удвоения периода при $k = 0$.



этой модели при малых k , в [7] рассмотрена ее эволюция с увеличением параметра нелинейности; мы меняем оба параметра системы. Рассмотрение ограничено величинами x_0, y_0 , при которых (1) имеет конечные решения, и значениями параметров, при которых в фазовом пространстве сосуществуют только периодические и квазипериодические движения.

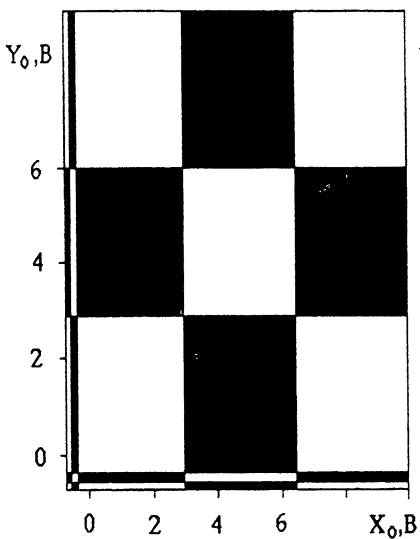
Эксперименты проводились на двух резистивно связанных колебательных контурах с варакторными диодами [2,3], синфазно возбуждаемых гармонической внешней силой.¹ Роль параметра связи k играла проводимость резистора связи, а параметра нелинейности λ — амплитуда внешнего воздействия. Показано, что закономерности, выявленные в дискретной модели (1) (рис. 1, б), обнаруживаются в реальных неавтономных системах (рис. 2).

2. В пределе нулевой связи ($k \rightarrow 0$) любой колебательный режим периода $N = 1, 2, 3, \dots$ (в единицах периода воздействия или дискретного времени) может быть реализован в исследуемых системах N способами [7]. Способы отличаются сдвигом колебаний подсистем во времени (сдвигом фаз) на $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Далее мы будем называть их видами колебаний и обозначать индексами N_m . Каждый вид существует в некоторой области параметров λ, k , пересечение областей для нескольких видов означает сосуществование их аттракторов (см. качественную схему на рис. 1, а из [7], на которой при $\lambda < \lambda_3$ отражены все возможные режимы, включая квазипериодические). При любых k и λ могут существовать только синфазные колебания ($m = 0$).

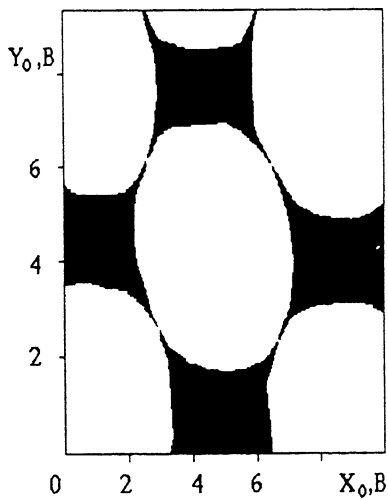
3. При $k = 0$ область конечных решений системы (1) на плоскости x_0, y_0 ограничена квадратом со стороной $(1 + \sqrt{1 + 4\lambda})$ и центром в $x_0 = y_0 = 0$. С ростом k квадрат постепенно превращается в круг (см. 4 и 1 на рис. 1, б). Если в фазовом пространстве для заданного значения параметров имеется несколько аттракторов, то площадь этой

Рис. 2. Бассейны притяжения циклов экспериментальной системы на плоскости X_0, Y_0 : существуют колебания периода 2 вида 2_0 и 2_1 (бассейн 2_1 заштрихован) при $K = 0$ (а) и $K \neq 0$ (б); бассейны видов колебаний периода 2 после удвоения периода дробятся на "блоки" из элементов бассейнов притяжения циклов периода 4 (с).

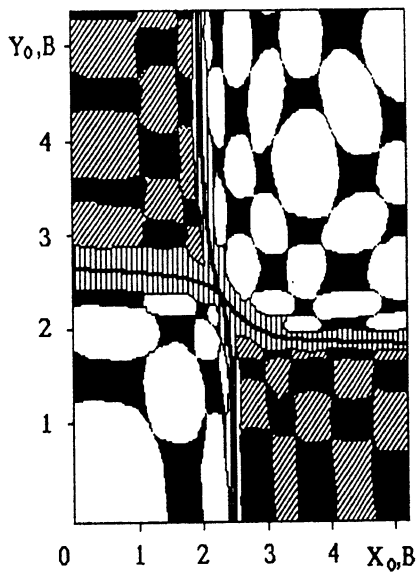
¹ В качестве динамических переменных использовались напряжения на диодах X, Y . Для задания начальных условий диоды с помощью электронных ключей подсоединялись к источникам постоянного напряжения X_0, Y_0 и в момент времени, соответствующий фиксированной фазе фоздействия Φ , одновременно включались в исследуемые цепи.



a)



b)



c)

области делится между их бассейнами. При этом в структуре любого из бассейнов можно выделить универсальную конфигурацию ("блок"), размер элементов в которой наиболее значителен в середине и уменьшается к границе (см., например, 4 на рис. 1, б). Исследование приграничных областей с большим разрешением свидетельствует об их фрактальной структуре.

Система (1) инвариантна относительно замены x, y на $-x, -y$; это определяет симметрию любого бассейна притяжения относительно осей $x = 0, y = 0$ (рис. 1, б). Кроме того, свойства симметрии аттракторов конкретного вида отражаются в конфигурации его бассейна. Так, для периодических колебаний с $m = 0$ и $N/2$ аттракторы и бассейны притяжения симметричны относительно диагонали $x = y$, т. е. переходят в себя при взаимозамене x и y . Несинфазные циклы с остальными номерами образуют зеркально-симметричные пары — они и их бассейны переходят друг в друга при взаимозамене x на y и номеров m на $(N - m)$.

При $k = 0$ границы бассейнов всех сосуществующих аттракторов прямолинейны, а элементы бассейнов имеют форму прямоугольников. С ростом k начинает доминировать синфазный вид. Элементы его бассейна становятся округлыми, поглощая часть площади бассейна сосуществующего вида (см. 4-1 на рис. 1, б). Вблизи правой границы области существования несинфазных видов на плоскости параметров элементы бассейна теряющего устойчивость цикла дополнительно дробятся (2, 3 на рис. 1, б).

Если с изменением параметров в фазовом пространстве появляются новые аттракторы, они "забирают" часть площади бассейнов аттракторов, сосуществующих с ними в соответствии со схемой рис. 1, а. Например, после первой бифуркации удвоения периода $\lambda > \lambda_1$ циклы 2_0 и 2_1 в точке 4 делят область конечных решений, занимаемую ранее бассейном цикла 1_0 , образуя "блоки". При переходе в точку 5 ($\lambda > \lambda_2$) в соответствии со схемой все элементы бассейна цикла 2_0 превращаются в "блоки", сформированные элементами бассейнов притяжения циклов 4_0 и 4_2 , а элементы бассейна 2_1 — в "блоки", состоящие из элементов бассейнов зеркально-симметричной пары 4_1 и 4_3 . При наличии квазипериодических движений периодические виды, участвующие в их формировании [7], отдают свои бассейны притяжения тору. Например, при движении по схеме от точки 5 вправо такими видами являются 4_1 и 4_3 .

4. На рис. 2 приведены двумерные проекции бассейнов притяжения циклов $N = 2$ и 4 экспериментальной системы. В отличие от модели (1), исследованная часть плоскости X_0, Y_0 ограничена пределами, выход за которые грозит разрушением диода из-за тепловой неустойчивости. В

отсутствие связи ($K = 0$) элементы бассейнов имеют прямоугольную форму (рис. 2, а), так что картина напоминает шахматную доску с равновеликими клетками, размеры которых зависят от выбора Φ . Увеличение связи, как и в модели, сопровождается расширением бассейна синфазного вида за счет несинфазного (рис. 2, б). Появление в фазовом пространстве дополнительных аттракторов приводит к дроблению всех элементов существовавших ранее бассейнов на "блоки" (рис. 2, с). На границах "блоков" фиксируется последовательное уменьшение элементов, однако, установить их самоподобие в эксперименте не представлялось возможным из-за технических ограничений на масштаб разрешения и неустойчивостей. Поэтому граница между "блоками" на рисунке отмечена жирной линией, а пограничные области просто заштрихованы.

5. Модель (1) и возбуждаемые осцилляторы обладают одинаковой (дискретной) симметрией по отношению к временному сдвигу (на шаг итерации или период воздействия). Качественное совпадение результатов физического эксперимента и численного исследования системы с дискретным временем (идентичность вида симметрии бассейнов притяжения и путей их эволюции при изменении параметров, включая такие тонкие моменты, как разделение областей на фрагменте (2) рис. 1, б) свидетельствует об общности описанных закономерностей для объектов с удвоением периода из выделенного класса и о грубости представленной картины.

Выражаем свою признательность В.В.Астахову и Д.И.Трубецкову за обсуждение работы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-02-16171.

Список литературы

- [1] Grebogi C., Ott E., York J.A. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. N 13. P. 935-938.
- [2] Kaneko K. Collaps of tori and genesis of chaos in dissipative system. World Scientific, 1986. 264 p.
- [3] Linsay P.S. // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. N 19. P. 1349-1352.
- [4] Buskirk R., Jeffries C. // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. N 5. P. 3332-3357.
- [5] Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 8. С. 991-1007.
- [6] Gu Y., Tung M., Yuan J.-M., Feng D.H., Narducci L.M. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. N 9. P. 701-704.
- [7] Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. // ЖТФ. 1990. Т. 60. В. 10. С. 19-26.

Поступило в Редакцию
26 декабря 1994 г.