Письма в ЖТФ, том 21, вып. 12 26 июня 1995 г.

01;07;

РАЗРУШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА ШЕРОХОВАТОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Ф.Х.Абдуллаев, Б.Б.Байзаков, Б.А.Умаров

1. Взаимодействие электромагнитной волны с шероховатой границей раздела двух сред является классической проблемой теории волн, имеющей большое значение для практических приложений (отражательная спектрометрия поверхности, эллипсометрия, оптический сканер и др.). Случаю плоских волн и границе раздела линейных сред посвящена обширная литература (см., например [1,2]). При взаимодействии локализованной волны с границей раздела двух сред, когда одна из них или обе являются нелинейными, возникает ряд новых эффектов, не имеющих аналогов в линейном случае: возбуждение нелинейной поверхностной волны [3], гигантская величина смещения Гуса–Хенкен (поправки к закону отражения Снеллиуса) [4], излучение линейных волн солитоном при пересечении границы [5] и др.

Теория взаимодействия локализованной волны в виде солитона нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с идеальной границей раздела двух нелинейных сред развита в работах [6,7]. Хаотическая динамика поверхностной волны на периодически модулированной границе изучена в [8]. В настоящей работе будет исследована динамика разрушения поверхностной волны, обусловленная шероховатостью границы раздела двух сред.

2. Рассмотрим падение пространственного солитона, представляющего собой самоподдерживающий волновод, на границу раздела двух нелинейных сред. Геометрия задачи соответствует падению TE волны, поляризованной перпендикулярно к xz-плоскости. Граничные условия состоят в непрерывности тангенциальных компонент E. Среды предполагаются керровски нелинейными, а граница раздела случайно модулированной вдоль z. Показатель преломления имеет вид

$$n(x,z;|E|^2)=\begin{cases} n_0+\alpha_0|E|^2, x<f(z),\\ n_1+\alpha_1|E|^2, x\leqslant f(z),\end{cases} \tag{1}$$

$f(z)$ является гауссовской, дельта-коррелированной случайной функцией

$$\langle f(z), f(z')\rangle = \sigma^2\delta(z-z'). \tag{2}$$

Можно показать, что волновое уравнение для огибающей электромагнитного поля A имеет вид нелинейного уравнения Шредингера с возмущением

$$iA_z + A_{xx} + 2|A|A = VA, \tag{3}$$

$$V = \theta(-x+f(z))\left[\Delta - 2(\alpha^{-1}-1)|A|^2\right],$$

где θ — единичная ступенчатая функция Хевисайда, $\Delta = n_0^2 - n_1^2 > 0$, $\alpha = \alpha_0/\alpha_1 < 1$, нижние индексы в (3) обозначают дифференцирование по соответствующей переменной.

Предполагается, что скачки линейного и нелинейного показателей преломления малы, т. е., что Δ, $(\alpha - 1) \ll 1$. При $V = 0$ односолитонное решение (3) имеет вид

$$A(x,z) = 2\eta_1 \mathrm{sech}\,[2\eta_1(x-x_1)]\exp\left[i(\frac{v_1 x}{2}) + 2\delta_1)\right], \tag{4}$$

где η_1, v_1, x_1, δ_1 — амплитуда, скорость, положение центра и фаза солитона соответственно. Амплитуда солитона и его скорость связаны с интенсивностью плоского нелинейного пучка P и углом его падения на поверхность раздела ψ соотношениями [6]: $\eta_1 = \alpha_1 P/8$, $v_1 = 2\beta k \sin\psi$, здесь βk — константа распространения, $k = \omega/c$ — волновой вектор. Влияние границы мы учтем, используя теорию возмущений для солитонов. В этом случае эволюция центра солитона описывается следующим уравнением [5]:

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} = -\frac{dU}{d\bar{x}}, \tag{5}$$

где $U(y)$ потенциал

$$U(y) = \Delta(1 - s_1^{-1})\mathrm{th}(y) + (\Delta/3s_1)\mathrm{th}^3(y),$$

$$y = 2\eta_1\bar{x} + f(z), \qquad s_1 = \frac{\Delta}{4\eta_1^2(1-\alpha)}, \qquad \tau = z/2\beta.$$

Известно [6], что, когда $f(z) = 0$, потенциал $U(y)$ имеет устойчивую точку минимума $y_0 = \mathrm{arcth}(\sqrt{1-s_1})$, соответствующую устойчивой поверхностной волне. Уравнение (5) представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение, где случайная величина входит в аргумент функции потенциала. Проанализировать решение этого уравнения в общем виде представляется довольно сложной задачей.

3. Проведем аналитическое исследование уравнения (5) с помощью метода линеаризации. Предположим, что шум является малым, и разложим все функции в ряд по степеням $f(z)$. Рассматривая малые колебания вблизи точки минимума потенциала $y_0 = 2\eta_1 \bar{x}_0$, получим следующее уравнение движения, аналогичное уравнению движения гармонического осциллятора в поле случайной силы:

$$\frac{a^2 y}{d\tau^2} + \omega^2 y = \omega^2 f(\tau), \tag{6}$$

где

$$y = 2\eta_1(x - x_0), \qquad \omega^2 = 8\eta_1^2 \Delta s_1 (1-s)^{1/2}.$$

Решение уравнения (6) может быть найдено в общей форме

$$y = \omega \int_0^\tau \sin\omega(\tau - \tau') f(\tau') d\tau', \tag{7}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \omega^2 \int_0^\tau \cos\omega(\tau - \tau') f(\tau') d\tau'. \tag{8}$$

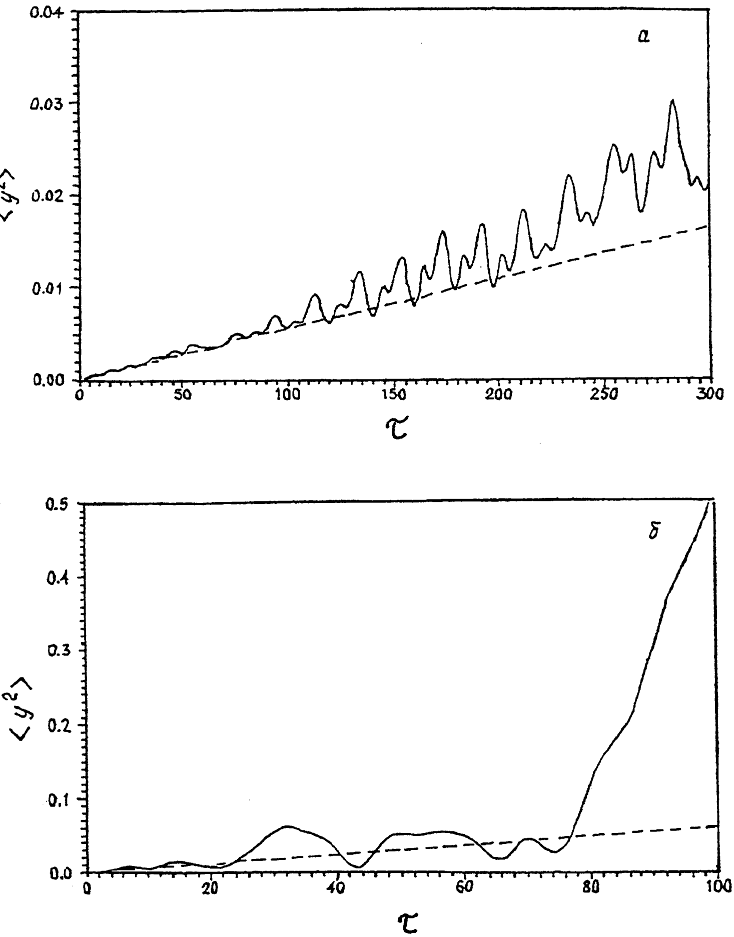
Используя выражения (2), (7) и (8), можно найти среднее отклонение частицы от точки минимума эффективного потенциала и среднюю кинетическую энергию

$$\langle y^2 \rangle = \frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \left(\tau - \frac{\sin 2\omega\tau}{2\omega} \right), \tag{9}$$

$$\langle (dy/dt)^2 \rangle = \frac{\sigma^2 \omega^4}{2} \left(\tau + \frac{\cos 2\omega\tau}{2\omega} \right). \tag{10}$$

Из этих выражений видно, что солитон ускоряется шумом. Можно оценить "время" разрушения поверхностной волны τ^*, имеющее в действительности смысл длины, которая разделяет точку падения и точку отражения локализованной волны от поверхности раздела нелинейных сред. Используем определение τ^* как времени, при котором энергия $\langle (dy/dt)^2 \rangle$ становится сравнимой с глубиной потенциальной ямы $U(\infty) - U(y_0)$ и частица покидает ее, пробегая при этом дистанцию $z = \tau^*/2\beta$, где

$$\tau^* = \frac{8\Delta(1-s_1)^{3/2}}{3\omega^4 \sigma^2 s_1}. \tag{11}$$



Среднеквадратичное отклонение координаты частицы от положения равновесия при значениях параметров: $\Delta = 0.1$; $\alpha = 0.9$; $\eta_1 = 0.63$; $\sigma = 0.03$ (*а*), 0.1 (*б*).
—— численное решение уравнения (6).
- - - - оценка по формуле (9).

Как и следовало ожидать, увеличение степени шероховатости σ приводит к уменьшению длины разрушения поверхностной волны. Сравнение аналитических расчетов и результатов прямого численного решения стохастического уравнения (6) с дельта-коррелированным шумом (2) показано на рис. 1. Использовался метод Дормана–Принса [9] седьмого порядка с автоматическим изменением длины шага интегрирования при контроле заданной точности. Усреднение по реализациям случайной функции производилось по ансамблю $N = 100$, обеспечивающей точность не хуже 10%. Следует отметить, что формула (11) получена в линейном приближении по малой случайной функции $f(\bar{z})$. Как видно из рис. 1, согласие аналитической оценки с численным решением хорошее на начальном участке кривой, когда колебания частицы в потенциальной яме близки к гармоническим. С увеличением амплитуды колебаний частицы начинают проявляться эффекты высших прядков и наблюдается более ускоренное удаление частицы от положения равновесия по сравнению с предсказанием гармонического приближения. Поэтому оценку длины разрушения поверхностной волны по формуле (11) следует рассматривать в качестве верхнего предела.

В заключение отметим, что в данной работе изучена стохастическая динамика пространственного солитона на шероховатой границе раздела двух нелинейных сред. Задача сведена к поведению частицы единичной массы в поле случайного потенциала. В рамках этой модели получена оценка для длины разрушения поверхностной волны, создаваемой при захвате солитона вблизи поверхности раздела сред. Результаты настоящей работы могут быть использованы для создания методики оценки степени шероховатости оптических поверхностей по измерению длины разрушения $z = \tau^*/2\beta$.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Узбекистана, грант № 9.

Авторы выражают благодарность Международному фонду Сороса за поддержку по гранту MZOOO.

Список литературы

[1] *Басс Ф.Г., Фукс И.М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.
[2] *Топорец А.С.*Оптика шероховатой поверхности. Л., 1988. 190 с.
[3] *Ахмедиев Н.Н., Корнеев В.И., Кузьменко Ю.В.* // ЖЭТФ. 1985.Т. 88. С. 107–118.
[4] *Tomlinson W.J., Gordon J.P., Smith P.W., Kaplan A.E.* // Appl. Opt. 1982. V. 21. P. 2041–2048.
[5] *Kivshar Yu.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A.* // Phys. Rev. A., 1990. V. 41. P. 1677–1688.
[6] *Aceves A.V., Moloney J.V., Newell A.C.* // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. P. 1809–1827.
[7] *Нестеров Л.А.* // Опт. и спектр. 1988. Т. 64. С. 1166–1172.
[8] *Abdullaev F.Kh., Umarov B.A.* // Phys. Lett. A. 1991. V. 160. P. 429–432.
[9] *Hairer E., Narsett S.P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987. P. 452.

Физико-технический институт
НПО "Физика-Солнце"АН РУз

Поступило в Редакцию
30 января 1995 г.