

01;03  
©1995

## О ВОЗМОЖНОЙ ПРИРОДЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННЫХ РЕЛАКСАЦИЕЙ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

*О.А.Григорьев, С.О.Ширяева, А.И.Григорьев*

Как отмечалось в [1,2], эффекты временной релаксации физико-химических свойств жидкости могут оказать весьма существенное влияние на спектр реализующихся волновых движений. Тем не менее влияние релаксационных эффектов на структуру волновых движений, равно как и физические механизмы реализации самих релаксационных эффектов, до сих пор мало исследованы. В этой связи представляется целесообразным обратить внимание на возможную стратификационную природу эффекта релаксации поверхностного натяжения, существование которого связано с наличием определенного ориентационного влияния поверхности жидкости на полярные молекулы и возникновением в приповерхностной области двойного электрического слоя [3]. Отметим также, что наличие на свободной поверхности даже неполярной жидкости нескомпенсированного электрического заряда, как это имеет место в задачах электрогидродинамической устойчивости заряженной поверхности жидкости [4], тоже приведет к появлению двойного электрического слоя и проявлению эффекта релаксации поверхностного натяжения.

1. Будем решать задачу об определении спектра капиллярно-гравитационных волн в стратифицированной жидкости, которую можно моделировать системой из двух несжимаемых вязких (с плотностями  $\rho_i$  и динамическими вязкостями  $\eta_i$ ,  $i = 1; 2$ ) жидкостей, нижняя из которых ( $i = 2$ ) заполняет в поле силы тяжести полупространство  $z < 0$  ( $\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$ , где  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения), а верхняя ( $i = 1$ ) имеет толщину  $h$ . Невозмущенная граница раздела между жидкостями пусть совпадает с плоскостью  $XOY$  декартовой системы координат. Верхнюю жидкость будем считать неэлектропроводной с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , нижнюю же — идеально электропроводной. Примем также, что свободная поверхность и невозмущенная граница раздела жидкостей однородно заряжены с поверхностными плотностями зарядов  $\kappa_i$ . Примем также, что

свободная поверхность и граница раздела жидкостей обладают поверхностными натяжениями с коэффициентами  $\sigma_i$ . Тогда математическая формулировка линеаризованной задачи будет иметь вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_i} \nabla P_i + \frac{\eta_i}{\rho_i} \cdot \Delta \mathbf{U}_i + \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_i = 0, \quad (1)$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad \mathbf{U}_z \rightarrow 0, \quad (2)$$

$$z = \zeta_2(x, t) : \quad \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

$$U_{1z} \approx \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}, \quad U_{2z} \approx \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 (\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}_1 + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U}_1) = \\ = \eta_2 (\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}_2 + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U}_2), \end{aligned} \quad (5)$$

$$P_1^{(2)} - P_2^{(2)} + 2\eta_2 \frac{\partial U_{2z}}{\partial z} - 2\eta_1 \frac{\partial U_{1z}}{\partial z} + 4\pi \varepsilon^{-1} \kappa_2^2 \cdot k \cdot \zeta_2 = \sigma_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial a^2}, \quad (6)$$

$$P_1^{(2)} = -\rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho_1 g \zeta_2, \quad P_2^{(2)} = -\rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \rho_2 g \zeta_2,$$

$$z = n + \zeta_1(x, t) : \quad U_{1z} \approx \frac{\partial \zeta_1}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\tau_0 \cdot (\mathbf{n}_0 \cdot \nabla) \mathbf{U}_1 + \mathbf{n}_0 \cdot (\tau_0 \cdot \nabla) \mathbf{U}_1 = 0, \quad (8)$$

$$P_1^{(1)} - 2\eta_1 \frac{\partial U_{1z}}{\partial z} + 4\pi \kappa_1^2 \cdot k \cdot \zeta_1 = \sigma_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}. \quad (9)$$

В этих соотношениях  $\zeta_1(x, t)$  и  $\zeta_2(x, t)$  — возмущения свободной поверхности и границы раздела соответственно, вызванные капиллярным волновым движением, существующим уже в силу наличия теплового движения молекул;  $\tau_0$  и  $\mathbf{n}_0$  — орты касательной и нормали к свободной поверхности верхней жидкости;  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{n}$  — орты касательной и нормали к границе раздела;  $P_i = P_i(\mathbf{r}, t)$  — давление внутри  $i$ -й жидкости;  $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_i(\mathbf{r}, t)$  — поле скоростей в ней.

Решая задачу (1)–(9), после несложных расчетов можно получить дисперсионное соотношение, определяющее спектр капиллярно-гравитационных волн в анализируемой системе. Поскольку в рассматриваемой задаче волны порождаются возмущениями свободной поверхности верхней жидкости, а также возмущениями границы раздела сред, то

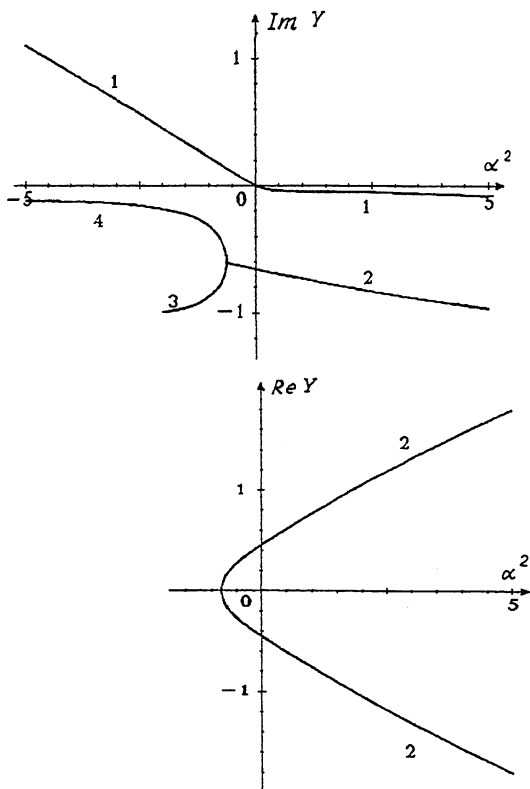


Рис. 1. Зависимости мнимой и вещественной компонент безразмерной частоты волнового движения  $y$  от величины безразмерного параметра  $\alpha^2$ , характеризующего баланс давлений на свободной поверхности двухслойной жидкости, несущей нескомпенсированный электрический заряд. Ветвь 1 соответствует движению свободной поверхности, ветви 2-4 — волнам на границе раздела верхней и нижней жидкостей.

решение дисперсионного уравнения даст две различные ветви волновых движений жидкости. На рис. 1 приведены результаты численного расчета зависимостей мнимой и вещественной компонент безразмерной частоты  $y = \frac{\rho_1 \omega}{\eta_1 k^2}$  от безразмерного параметра  $\alpha^2 = \frac{1}{\eta_1 k} (g \rho_1 + \sigma_1 k^2 - 4\pi k \kappa_1^2)$  при фиксированном (докритическом) значении поверхностной плотности заряда  $\kappa_2$  на границе раздела сред по дисперсионному уравнению задачи (1)-(9). Кривая 1 соответствует волнам на свободной поверхности, кривые 2-4 — волнам на границе раздела верхней и нижней жидкостей. Часть кривой 1, лежащая при  $\alpha^2 < 0$ , определяет инкремент неустойчивости Тонкса-Френкеля.

2. Сформулируем теперь задачу об определении капиллярно-гравитационного волнового движения в вязкой идеально проводящей жидкости с поверхностной плотностью заряда  $\kappa$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , коэффициентом динамической вязкости  $\eta$ , плотностью  $\rho$ , заполняющей в поле сил тяжести полубесконечное пространство  $z < 0$ , в области частот, в которой существенен эффект релаксации поверхностного натяжения. Математическая формулировка такой задачи имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \cdot \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (10)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{U} \rightarrow 0, \quad (11)$$

$$z = \zeta(x, t): \quad U_z \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\tau_0 \cdot (\mathbf{n}_0 \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n}_0 \cdot (\tau_0 \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0, \quad (13)$$

$$P - 2\eta \frac{\partial U_z}{\partial z} + 4\pi \cdot \kappa^2 \cdot k \cdot \zeta = \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (14)$$

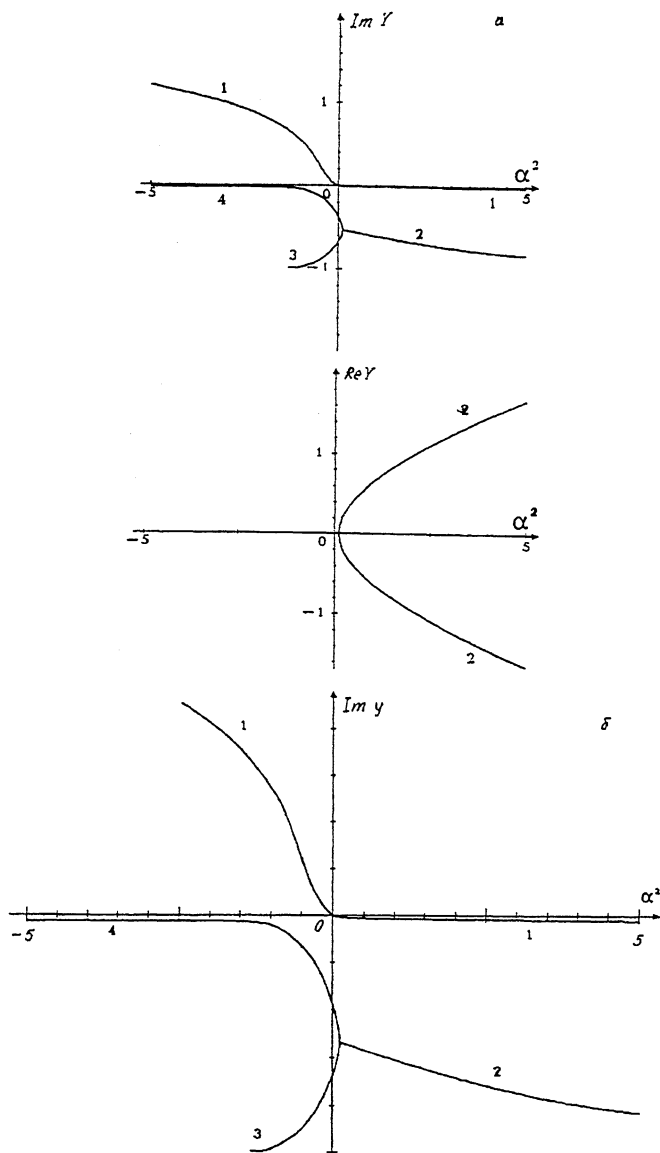
с коэффициентом поверхностного натяжения, имеющим вид [1]

$$\sigma = \sigma_\infty - \sigma_*(1 - i\omega\tau_n)^{-1} = \sigma_0 - i\omega\tau_n\sigma_*/1 - i\omega\tau_n, \quad \sigma_* = \sigma_\infty - \sigma_0,$$

где  $\sigma_0$  — коэффициент поверхностного натяжения на нулевой частоте;  $\sigma_\infty$  — коэффициент поверхностного натяжения на высоких частотах (при  $\omega\tau \gg 1$ );  $\tau_n$  — характерное время релаксации поверхностного натяжения.

Решение задачи (10)–(14) легко выписывается (см., например, [1,2]). На рис. 2 приведены результаты численного расчета по соответствующему дисперсионному уравнению зависимостей мнимой и вещественной компонент безразмерной частоты  $y = \frac{\rho\omega}{\eta k^2}$  от безразмерного параметра  $\alpha^2 = \frac{1}{\eta \cdot k} (g\rho + \sigma_0 k^2 - 4\pi k \kappa^2)$  при  $\rho^{-1} \eta k^2 \tau_n = 10$  и при фиксированном значении  $\beta = \frac{\sigma_* \rho}{\eta^2 k}$ , характеризующего для конкретной жидкости волновое число анализируемой волны. Кривая 1 соответствует капиллярным волнам на поверхности жидкости, а кривые 2–4 — релаксационным волнам. Сравнение дисперсионных кривых, приведенных на рис. 1 и 2, показывает, что спектры волновых движений жидкости в двух сравниваемых системах качественно близки.

Обнаруженное сходство структур волновых движений в рассматриваемых задачах представляется достаточно закономерным, так как сам эффект релаксации поверхностного



**Рис. 2.** Зависимости мнимой и вещественной компонент безразмерной частоты  $y$  от величины безразмерного параметра  $\alpha^2$  для жидкости с релаксирующим поверхностным натяжением. Ветвь 1 соответствует капиллярным волнам на свободной поверхности, а ветви 2-4 — релаксационным (а). Центральная часть зависимости  $Im y = Im y(\alpha^2)$ , приведенной на рис. 2, а, изображенная с большим разрешением (б).

натяжения связан с наличием двойного электрического слоя у поверхности жидкости и с некоторым упорядочением ориентации ее молекул в приповерхностном слое конечной толщины, т. е. с возникновением своего рода стратификации по физико-химическим свойствам (плотности, вязкости и т. п.), обусловленной наличием свободной поверхности, в общем случае просто границы, даже твердой. Яснее становится и природа релаксационных волн, обусловленных эффектом динамического поверхностного натяжения. Они теперь естественно связываются с периодическими возмущениями нижней границы стратифицированного приповерхностного слоя жидкости (нижней границы двойного электрического слоя у поверхности жидкости), вызываемыми уже тепловым движением молекул жидкости.

### Список литературы

- [1] Быковский Ю.А., Манькин Э.А., Полуэктов П.П. и др. // ЖТФ. 1976. Т. 46. № 11. С. 2211-2213.
- [2] Григорьев О.А. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. № 24. С. 7-11.
- [3] Кочурова Н.И., Русанов А.И. // КЖ. 1981. Т. 43. С. 36-42.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 3. С. 3-22.

Поступило в в Редакцию  
22 февраля 1995 г.

---