

01:05  
©1995

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОВЕДЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ ПРИ ОПИСАНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ УРАВНЕНИЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

*К. Л. Муратиков*

В настоящее время для определения теплофизических параметров твердотельных объектов широко используется метод температурных волн [1,2]. При этом теоретическая интерпретация получаемых результатов основывается на законе теплопроводности Фурье, приводящем для распределения температуры в объекте к уравнению параболического типа [1]. Уравнение теплопроводности параболического типа характеризуется бесконечной скоростью распространения тепла и приводит к повышению температуры во всех областях объекта сразу же после начала действия источника тепла в какой-либо его части. Для преодоления указанного недостатка предложено уравнение теплопроводности гиперболического типа, обеспечивающего конечное значение скорости распространения тепла [3-5].

Обычно принято считать, что эффект конечности скорости распространения тепла не играет существенной роли в процессах теплопроводности, так как в большинстве материалов время релаксации, характеризующее переход к диффузионному механизму распространения тепла, достаточно мало (порядка  $10^{-14}$ – $10^{-10}$  с) [4,5]. Вместе с тем при низких температурах время релаксации может быть существенно больше [6]. Кроме того, при обычных условиях объекты со сложной внутренней структурой также могут обладать большими временами релаксации, достигающими значений порядка десятков секунд [7].

К настоящему времени установлены некоторые общие условия, при которых следует использовать уравнение теплопроводности гиперболического типа [4,5]. Исследованы также особенности протекания тепловых процессов в объектах с конечной скоростью распространения тепла при импульсном воздействии лазерного излучения [8,9]. Вместе с тем для теплофизических исследований в приведенном диапазоне значений времен релаксации возможно использование и метода температурных волн. В связи с этим пред-

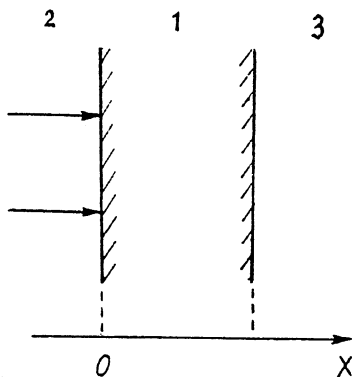


Рис. 1. Геометрия задачи. 1 — образец; 2, 3 — окружающая среда. Стрелками указано действие внешнего теплового источника.

ставляет интерес рассмотрение вопроса о влиянии фактора конечности скорости распространения тепла на характеристики температурных волн, а также проведение анализа по возможности диагностики процессов распространения тепла подобного рода с их помощью.

Рассмотрим в данной работе распространение температурных волн в объекте конечной толщины (рис. 1). При этом для простоты ограничимся одномерным случаем, когда температурные волны распространяются только вдоль оси  $x$ . Тогда колебания температуры внутри исследуемого объекта при конечной скорости распространения тепла описываются гиперболическим уравнением [4]

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\tau} \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $\kappa$  — температуропроводность объекта,  $\tau$  — время релаксации.

При решении уравнения (1) тепловой поток следует определять не из закона Фурье, а на основании закона, учитывающего конечное значение времени релаксации [4]. В соответствии с ним связь между тепловым потоком и температурой определяется выражением

$$q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} = -K \frac{\partial \Delta T}{\partial x}, \quad (2)$$

где  $K$  — коэффициент теплопроводности образца.

Для решения поставленной задачи по методу температурных волн колебания температуры внутри объекта следует представить в виде

$$\Delta T(x, t) = \Delta T(x, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

где  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  — частота внешнего теплового источника, возбуждающего температурные волны.

Уравнение (1) необходимо решать с граничными условиями, соответствующими равенству температур и тепловых потоков на границах объекта. В рассматриваемой задаче граничные условия для температур имеют обычный вид. Граничные условия для тепловых потоков несколько видоизменяются с учетом использования закона (2). В данной работе для простоты будем считать, что теплоотвод во внешнюю среду на границах объекта отсутствует. Тогда при действии на границе объекта  $x = 0$  поверхностного теплового источника, изменяющегося во времени в соответствии с выражением (3), граничные условия для тепловых потоков будут определяться равенствами

$$W_s = -\frac{K}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \Delta T}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial \Delta T(x, \omega)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

где  $W_s$  — амплитуда действующего на границе  $x = 0$  поверхностного источника тепла.

С помощью уравнения (1) и указанных граничных условий можно найти распределение температуры внутри объекта. Оно определяется выражением

$$\Delta T(x, \omega) = \frac{(1 - i\omega\tau)W_s}{2K\sigma \operatorname{sh}\sigma l} \left[ (\operatorname{ch}\sigma l - \operatorname{sh}\sigma l)e^{\sigma x} + (\operatorname{ch}\sigma l + \operatorname{sh}\sigma l)e^{-\sigma x} \right], \quad (5)$$

где

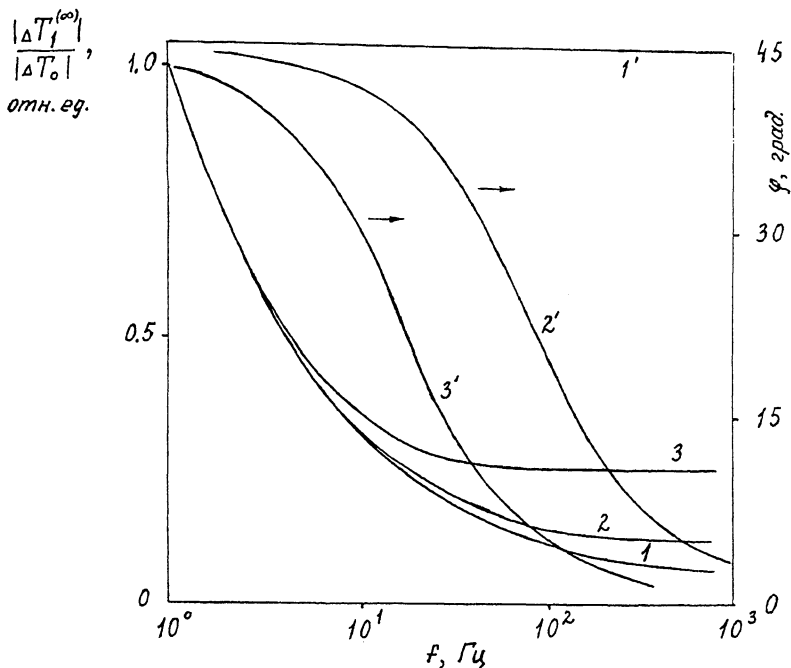
$$\sigma = \frac{1}{d} \left( -\frac{1}{\Delta} + i\Delta \right), \quad d = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}, \quad \Delta = \sqrt{\omega\tau + \sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}.$$

Решение (5) совместно с равенством (3) описывает температурные волны внутри объекта. Однако обычно при использовании метода температурных волн производятся измерения не их непосредственных характеристик, а колебаний температуры на одной из поверхностей объекта. Исследуем их поведение на поверхности объекта  $x = 0$ . С помощью равенства (5) температуру  $\Delta T_1(\omega)$  на этой поверхности можно представить в виде

$$\Delta T_1(\omega) = \Delta T_1^{(\infty)}(\omega) \cdot \operatorname{cth}\sigma l, \quad (6)$$

где  $\Delta T_1^{(\infty)}(\omega) = \frac{(1 - i\omega\tau)W_s}{2K\sigma}$  — колебания температуры на поверхности бесконечно толстого образца.

Проанализируем поведение температуры на поверхности объекта более подробно. Исследуем сначала этот вопрос для бесконечно толстого образца. На рис. 2 представлены результаты расчета амплитуды и фазы колебаний температуры  $\Delta T_1^{(\infty)}$  в зависимости от частоты модуляции



**Рис. 2.** Поведение амплитуды и фазы колебаний температуры на поверхности полугограниченного объекта в зависимости от частоты модуляции теплового потока. Кривые 1-3 — значения амплитуды соответственно для  $\tau = 0, 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}, 10^{-2} \text{ с}$ . Кривые 1'-3' — поведение фазы для тех же значений  $\tau$ . Для всех кривых  $\kappa = 0.1 \text{ см}^2/\text{с}$ .

теплового источника. Значения амплитуды нормированы на величину колебаний температуры поверхности объекта с  $\tau = 0$  при частоте модуляции в 1 Гц. Из приведенных данных видно, что наиболее характерным отличием в поведении амплитуды колебаний температуры при использовании уравнения гиперболического типа является ее стремление при высоких частотах к некоторой конечной величине, а не к нулевому значению, как при решении уравнения параболического типа. В соответствии с выражением (6) это значение определяется равенством  $|\Delta T_1^{(\infty)}| = \frac{W_s}{K} \sqrt{\frac{\kappa \tau}{2}}$ .

В поведении фазы колебаний температуры также имеются существенные различия. Так, фаза колебаний температуры поверхности объекта, определяемая из уравнения параболического типа, не зависит от частоты и равна  $45^\circ$ . При использовании уравнения гиперболического типа фаза колебаний температуры оказывается близкой к  $45^\circ$  только при низких частотах. С переходом в область высоких

частот ( $\omega\tau \gtrsim 1$ ) она постепенно приближается к нулевому значению.

Следует отметить, что гиперболический характер уравнения (1) начинает сказываться на поведении амплитуды и фазы температурных волн при частотах примерно на порядок ниже значения  $f = \frac{1}{\tau}$ . При этом в соответствии с данными, представленными на рис. 2, в первую очередь он начинает влиять на фазу колебаний температуры.

Перейдем к случаю образцов конечной толщины. Анализ выражения (6) показывает, что в этом случае поведение колебаний температуры при изменении частоты теплового источника будет разным для объектов разной толщины. Так, если толщина объекта  $l < \sqrt{2\kappa\tau}$ , то с ростом частоты вместо монотонного уменьшения амплитуды и фазы колебаний появляются существенные осцилляции. На рис. 3 приведены результаты расчета колебаний температуры на поверхности объекта  $x = 0$ , выполненные для данного случая с помощью выражения (6). Амплитуда нормирована на величину колебаний температуры от объекта бесконечной толщины с  $\tau = 0$  при частоте модуляции 1 Гц. В области высоких частот при  $\omega^2\tau^2 \gg 1$  период осцилляций определяется равенством  $\Delta f = \sqrt{\frac{\kappa}{2\tau}} \frac{1}{l}$ . Таким образом, плоскопараллельная пластинка при подобных условиях представляет собой своеобразный "тепловой интерферометр".

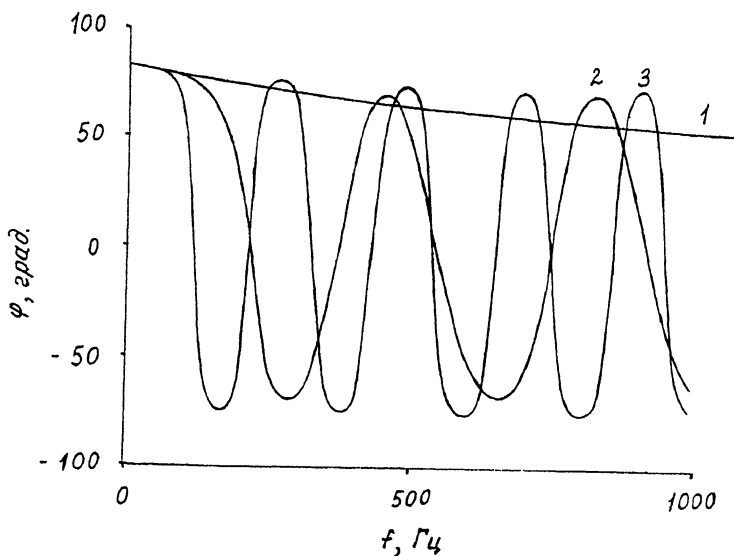
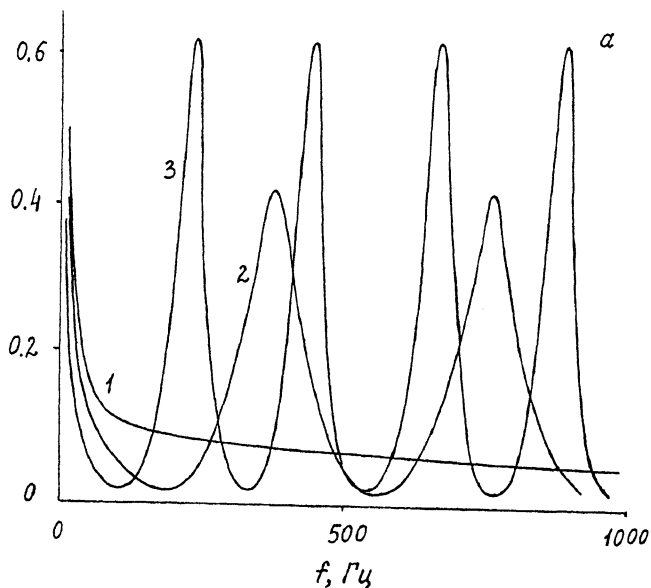
Важной особенностью ситуации с  $l < \sqrt{2\kappa\tau}$  является отсутствие перехода к случаю образцов бесконечной толщины по мере повышения частоты температурных волн и выполнения неравенства  $d(\omega) < l$ . Отметим, что при распространении температурных волн в соответствии с законом Фурье при  $d(\omega) < l$  такой переход осуществляется всегда.

При гиперболическом характере распространения тепла переход к случаю образцов бесконечной толщины имеет место только для объектов с  $l \gg \sqrt{2\kappa\tau}$ . При  $l \simeq \sqrt{2\kappa\tau}$  осцилляции в поведении амплитуды и фазы температуры в зависимости от частоты сохраняются и при условии  $d(\omega) < l$ , однако они происходят вблизи значений, характерных для объектов бесконечной толщины.

В приведенном анализе не учитывался теплообмен образца с окружающей средой. Рассмотрим кратко вопрос о его влиянии на особенности поведения температурных волн. Будем считать, что окружающая объект среда характеризуется обычным типом теплопроводности. Тогда анализ наличия теплообмена, например на границе  $x = 0$ , показывает, что при частотах  $\omega > \frac{1}{\tau} \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2$  характерные осцилляционные особенности в поведении температуры поверхности объекта практически полностью исчезают. Таким обра-

$$\frac{|\Delta T_1^{(\infty)}|}{|\Delta T_0|},$$

отн. ед.



**Рис. 3.** Поведение амплитуды (а) и фазы (б) колебаний температуры на поверхности объекта конечной толщины в зависимости от частоты модуляции теплового потока. Кривые 1-3 соответствуют  $\tau = 0, 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}, 10^{-2} \text{ с}$ . Для всех кривых  $\kappa = 0.1 \text{ см}^2/\text{с}$ .

зом, при использовании метода температурных волн гиперболический характер их распространения в объекте проявляется в определенном диапазоне частот. В частности, для рассматриваемого случая этот диапазон определяется условиями  $\omega \gtrsim \frac{1}{\tau}$ ,  $\omega \lesssim \frac{1}{\tau} \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \left( \frac{K_1}{K_2} \right)^2$ . Выполненная оценка показывает, что учет теплообмена с окружающей средой способен заметным образом влиять на поведение температурных волн при гиперболическом характере их распространения в объекте. Поэтому вопрос об изменении характеристик температурных волн в объектах с гиперболическим типом теплопроводности при наличии теплообмена нуждается в специальном исследовании.

Таким образом, гиперболический характер распространения тепла приводит к появлению существенных особенностей в поведении температурных волн. В связи с этим метод температурных волн может быть использован для диагностики гиперболического типа теплопроводности. При этом для экспериментальных исследований, по-видимому, целесообразно использовать фотоакустический, фотодефлекционный и фоторефлекционный методы [10]. Указанные методы применимы в широком диапазоне частот температурных волн и к объектам различных типов.

В заключение автор выражает благодарность А.Л. Глазунову за помощь в проведении количественных расчетов. Проведенное исследование стало возможным благодаря частичной поддержке МНФ и Российского правительства по гранту N JCF100.

### Список литературы

- [1] Карлслюй Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
- [2] Busse G. // J. de Physique. 1983. V. 44. С. 6. N 10. P. 427-436.
- [3] Лыков А.В. // ИФЖ. 1974. Т. 26. № 5. С. 781-793.
- [4] Joseph D.D., Preziosi L. // Rev. Mod. Phys. 1989. V. 61. N 1. P. 41-73.
- [5] Joseph D.D., Preziosi L. // Rev. Mod. Phys. 1990. V. 62. N 2. P. 375-391.
- [6] Coleman B.D., Newman D. // Phys. Rev. B. 1988. V. 37. N 4. P. 1492-1498.
- [7] Kaminski W. // J. of Heat Transfer. 1990. V. 112. P. 555-560.
- [8] Kim W.S., Hector L.G., Özisik M.N. // J. Appl. Phys. 1990. V. 68. N 11. P. 5478-5485.
- [9] Vedavaz A., Mitra K., Kumar S. // J. Appl. Phys. 1994. V. 76. N 9. P. 5014-5021.
- [10] Tam A.C. // Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. N 2. P. 381-431.

Физико-технический  
институт им. А.Ф. Иоффе РАН  
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию  
28 февраля 1995 г.