Письма в ЖТФ, том 21, вып. 19 12 октября 1995 г.

01;05.2;07;09

БРЭГГОВСКИЕ СОЛИТОНЫ В ДВУМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

А.В.Ведерко, О.Н.Ермакова, В.Ф.Марченко, А.П.Сухоруков

В одномерной периодической диэлектрической структуре, обладающей кубичной нелинейностью, возможно возбуждение неподвижных или медленно перемещающихся солитонов, частота которых лежит в области брэгговского резонанса [1,2]. В настоящей работе мы рассмотрим возможность существования таких солитонов в структуре, диэлектрическая проницаемость которой является периодической функцией двух координат. В качестве модельного для такой среды используем уравнение:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k_0^2 f(x,y)E + k_0^2 \lambda |E|^2 = 0, \tag{1}$$

где E — компонента электрического поля волны, перпендикулярная плоскости (x,y), $k_0^2 = \omega^2/c^2$, λ — параметр нелинейности. При разложении функции $f(x,y)$ в двойной ряд Фурье ограничимся членами, содержащими первые пространственные гармоники с волновыми числами $K_x = 2\pi/d_1$ и $K_y = 2\pi/d_2$ (d_1, d_2 — периоды модуляции проницаемости по x и y):

$$f(x,y) = \varepsilon_{00}(1 + \mu_1 \cos(K_x x) + \mu_2 \cos(K_y y) +$$
$$+ \mu_3 \cos(K_x x - K_y y) + \mu_4 \cos(K_x x + K_y y) + \ldots \tag{2}$$

Для упрощения дальнейших выкладок положим $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$.

Поскольку в основе существования нелинейных локализованных состояний лежит механизм нелинейного просветления среды, рассмотрим этот механизм в деталях на примере структуры с небольшой глубиной пространственной модуляции ε, т. е. при $\mu \approx |X| \ll 1$. В этом случае можно применить известный метод двух связанных волн [3], описывающий структуру поля в одномерной периодической среде внутри первой полосы непрозрачности. Легко убедиться, что в двумерном случае необходимо учитывать четыре волны, распространяющиеся попарно навстречу друг другу $A_1 \leftrightarrows A_4$ и $A_2 \leftrightarrows A_3$ по диагоналям обратной решетки.

Для медленно меняющихся вдоль x и y амплитуд этих волн имеем систему уравнений

$$K_x \frac{\partial A_1}{\partial x} + K_y \frac{\partial A_1}{\partial y} = i\Delta\beta A_1 + i\sigma(A_2 + A_3 + A_4) + G_1,$$
$$-K_x \frac{\partial A_4}{\partial x} - K_y \frac{\partial A_4}{\partial y} = i\Delta\beta A_4 + i\sigma(A_1 + A_2 + A_3) + G_4,$$
$$K_x \frac{\partial A_2}{\partial x} - K_y \frac{\partial A_2}{\partial y} = i\Delta\beta A_2 + i\sigma(A_1 + A_3 + A_4) + G_2,$$
$$-K_x \frac{\partial A_3}{\partial x} + K_y \frac{\partial A_3}{\partial y} = i\Delta\beta A_3 + i\sigma(A_1 + A_2 + A_4) + G_3, \quad (3)$$

где $G_{1,2,3,4}$ — члены, учитывающие нелинейность среды. Структура, например G_1, имеет вид

$$G_1 = i\chi A_1 \left[\frac{1}{2}|A_1|^2 + |A_2| + |A_3| + |A_4| + \frac{A_2 A_3 A_4^*}{A_1}\right],$$

$$\Delta\beta = \left[k_0^2\varepsilon_{00} - K_x^2/4 - K_y^2/4\right], \quad \sigma = \varepsilon_{00} k_0^2 \mu/2, \quad \chi = 2k_0^2\lambda.$$

Аналитическое решение (3) удается получить, предположив, что амплитуды всех волн меняются только вдоль одной из координат, например x, а периоды модуляции равны $d_1 = d_2$. Представляя комплексные амплитуды волн в виде

$$A_j = \tfrac{1}{2}a\ \exp(i\varphi) + c.c., \qquad j = 1, 2,$$
$$A_j = \tfrac{1}{2}a\ \exp(-i\varphi) + c.c., \qquad j = 3, 4,$$

систему (3) можно свести к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dx} = 2a\sigma\sin(2\varphi) \\ \dfrac{d\varphi}{dx} = \Delta\beta + \sigma(1 + \cos(2\varphi)) + \dfrac{9}{4}\chi a^2 \end{cases} \quad (4)$$

(все коэффициенты σ, $\Delta\beta$, χ нормированы на величину $K_x = K_y$).

Выбор частоты внутри полосы непрозрачности определяет значение параметра $\Delta\beta$. Условия $\Delta\beta = \sigma$ и $\Delta\beta = -3\sigma$ определяют верхнюю и нижнюю границы брэгговской полосы

$$\omega_+ = \frac{\tilde{n}_0 K_x}{\sqrt{2\varepsilon_{00}}}\left(1 + \frac{\mu}{4}\right), \qquad \omega_- = \frac{\tilde{n}_0 K_x}{\sqrt{2\varepsilon_{00}}}\left(1 - \frac{3\mu}{4}\right),$$

а равенство $\Delta\beta = -\sigma$ дает середину этой полосы $\omega^* = \frac{C_0 K_x}{\sqrt{2\varepsilon_{00}}}\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)$.

Из системы (4) можно получить уравнение типа синус-Гордона для фазы φ

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 4\sigma(\sigma + \Delta\beta)\sin(2\varphi) + 4\sigma^2\sin(4\varphi) = 0, \tag{5}$$

решения которого известны [1]. В окрестности, например, $\omega \approx \omega_-$ солитонные решения системы (4) имеют вид ($\chi < 0$):

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \arctan\left[\sqrt{\frac{2\sigma - (\sigma + 3\beta)}{2\sigma + (\sigma + 3\beta)}}\coth\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sqrt{4\sigma^2 - (\sigma + \Delta\beta)^2}\cdot(x - x_0)\right)\right], \tag{6a}$$

$$a^2 = \frac{8(3\sigma + \Delta\beta)}{9|\chi|}\times$$

$$\times\frac{\cosh^{-2}\left[\sqrt{4\sigma^2 - (\sigma + \Delta\beta)}^2\cdot(x - x_0)\right]}{1 + \frac{3\sigma^2 + \Delta\beta}{\sigma - \Delta\beta}\tanh\left(\sqrt{4\sigma^2 - (\sigma + \Delta\beta)^2\cdot(x - x_0)}\right)}.$$

Соответственно при $\omega \approx \omega^*$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} + \arctan\Big[\exp(-4\sigma(x - x_0))\Big],$$
$$a = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\sigma}{|\chi|}}\cosh^{-1/2}(-4\sigma(x - x_0)). \tag{6б}$$

Солитонные решения представляют собой своеобразные страты; влияние двумерности при сделанных выше допущениях сводится к тому, что продольный размер неподвижного солитона вдвое меньше размера солитона для одномерной среды.

Принципиальным условием существования локализованных состояний является пространственная модуляция фазы, обеспечивающая механизм нелинейного просветления среды. Например, при $\omega \approx \omega^*$ фаза, определяющая положение максимумов и минимумов стоячей волны в линейной среде, постоянна и равна $\pi/4$. За счет самовоздействия происходит сдвиг фазы в окрестности $x \approx x_0$ таким образом, чтобы максимум стоячей волны соответствовал максимуму диэлектрической проницаемости. В этих условиях создаются оптимальные условия изменения глубины модуляции (и, следовательно, ширины брэгговской плосы) ε за счет интенсивности стоячей волны. При отрицательном знаке $\lambda < 0$ и критической амплитуде неподвижного солитона динамическая часть диэлектрической проницаемости в окрестности $x \approx x_0$ обращается в нуль (полоса непропускания стягивается в точку). На крыльях солитона фаза стремится к значению $\pi/4$, характерному для линейной среды.

В отличие от бегущих солитонов в двумерной среде, которые, как правило, оказываются неустойчивыми, найденные выше солитоны как собственные моды периодически-неоднородной среды являются устойчивыми состояниями. Это подтверждает численный расчет, выполненный недавно в работе [4] для дискретной двумерной ангармонической решетки твердого тела. Вследствие потерь в реальной системе для возбуждения неподвижных солитонов необходима непрерывная подкачка энергии. Учет внешних источников энергии может приводить к явлениям бистабильности и стохастизации процесса. Однако, как показывают численные расчеты и эксперимент, выполненные для одномерной цепочки нелинейных резонаторов [5], существование солитонных пространственных состояний возможно в течение достаточно долгого времени.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93–02–16059).

Список литературы

[1] *Mills D.L., Trullinger S.E.* // Phys. Rev. B. 1987. V. 36. N 2. P. 947.
[2] *Christodoulides D.N., Joseph R.I.* // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. N 15. P. 1746.
[3] *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.
[4] *Flach S., Kladko K., Willis C.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 50. N 3. P. 2293.
[5] *Ведерко А.В., Марченко В.Ф., Сухоруков А.П.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. В. 20. С. 56.

Физический факультет
Московского государственного
университета им. М.В. Ломоносова

Поступило в Редакцию
23 мая 1995 г.