01;10

СИНТЕЗ ПОЛНЫХ РЕШЕНИЙ ПАРАКСИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЕКУРРЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ю.К.Голиков, В.Г.Кудрявин

В статье рассматривается классическая проблема параксиальной корпускулярной оптики — проблема нахождения полных решений параксиального уравнения в замкнутой форме [1].

Представим траектории и распределение потенциала вдоль оси системы в параксиальном уравнении

$$4fy'' + 2f'y' + f''y = 0 \tag{1}$$

в виде

$$f(x) = \exp\Big(\int v(x)dx\Big),$$

$$y(x) = C_1 \exp\Big(\int a(x)dx\Big) \sin\Big(\int b(x)dx\Big) = \tag{2}$$

$$= C_1 \exp\Big(\int a(x)dx\Big) \sin\Big(\int b(x)dx + C_2\Big),$$

$v(x)$, $a(x)$, $b(x)$ — некоторые произвольные функции. Особенности и свойства такого рода представления решений подробно обсуждались в работе [2].

Обратим внимание, что в (2) $y(x)$ — является полным решением уравнения (1), содержащим две произвольные константы C_1, C_2.

После подстановки (2) в (1) получим

$$(4a' + v' + 4a^2 + v^2 + 2va - 4b^2) \sin\Big(\int b(x)dx\Big) +$$

$$+ \Big(4b' + 8ab + 2vb\Big) \cos\Big(\int b(x)dx\Big) + \tag{3}$$

$$+ \Big(4b' + 8ab + 2vb\Big) \cos\Big(\int b(x)dx\Big) = 0.$$

Потребуем одновременного обращения в ноль скобок перед $\sin\left(\int b(x)dx\right)$ и $\cos\left(\int b(x)dx\right)$ в выражении (3). При этом получается система вида

$$\begin{cases} (4a+v)' + (4a+v)^2 + 12a^2 - 6a(4a+v) - 4b^2 = 0, & (4.1) \\ (4a+v) = -2\dfrac{b'}{b}. & (4.2) \end{cases}$$

Выражая $(4a+v)$ в (4.1) с помощью (4.2) и разрешая уравнение (4.1) как квадратное относительно $a(x)$, получим:

$$\begin{cases} a(x) = -\dfrac{b'}{2b} + \dfrac{1}{6}\sqrt{6\dfrac{b''}{b} - 9\left(\dfrac{b'}{b}\right) + 12b^2}, & (5.1) \\ v(x) = -2\dfrac{b'}{b} - 4a. & (5.2) \end{cases}$$

С целью избавления от радикала в выражении (5.1) проведем следующее представление подрадикального выражения:

$$6\frac{b''}{b} - 9\left(\frac{b'}{b}\right)^2 + 12b^2 = 9\left(\frac{b'}{b} - \frac{m'}{m}\right)^2, \tag{6}$$

$m(x)$ — некоторая произвольная функция. При этом система (5) примет следующий вид:

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{m'}{2m}, \\ v_1 = -2\dfrac{b'}{b} + 2\dfrac{m'}{m}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = -\dfrac{b'}{b} + \dfrac{m'}{2m}, \\ v_2 = 2\dfrac{b'}{b} - 2\dfrac{m'}{m}. \end{cases} \tag{7}$$

Уравнение (6) после проведения замены

$$L(x) = b^{-2}(x) \tag{8}$$

превращается в линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$L'' + 3\left(\frac{m'}{m}\right)L' + 3\left(\frac{m'}{m}\right)^2 L = 4. \tag{9}$$

Общее решение такого уравнения выражается следующей формулой [3]:

$$L = 4l\int \frac{1}{l^2m^3}\left(\int lm^3ax\right)ax, \tag{10}$$

где $l(x)$ есть решение соответствующего уравнению (9) однородного линейного уравнения

$$l'' + 3\left(\frac{m'}{m}\right) l' + 3\left(\frac{m'}{m}\right)^2 l = 0. \tag{11}$$

Решение исходного параксиального уравнения свелось, таким образом, к нахождению любой частной пары $(l(x); m(x))$, обращающей уравнение (11) в тождество. После нахождения такой пары полное решение параксиального уравнения $y(x)$ и соответствующее ему распределение потенциала выразятся следующим образом в соответствии с формулами (8), (7) и (2):

$$f_1(x) = m^2 b^{-2}, \quad y_1(x) = C_1 m^{-1/2} \sin\left(\int b(x)dx + C_2\right),$$

$$f_2(x) = m^{-2} b^2, \quad y_2(x) = C_1 m^{1/2} b^{-1} \sin\left(\int b(x)dx + C_2\right), \tag{12}$$

$$b = \left(4l \int \frac{1}{l^2 m^3}\left(\int l m^3 dx\right) dx\right)^{-1/2}.$$

Строить новые пары решений однородного уравнения (11) можно по следующей схеме.

Пусть $(l_0; m_0)$ — известная пара функций, обращающая уравнение (11) в тождество, построим новую пару $(l_1; m_1)$ одним из следующих способов:

Способ 1

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0\left(\int l_0^k(x) \cdot m_0^{2k+1}(x)dx\right)^{3t}, \\ m_1 &= m_0\left(\int l_0^k(x) \cdot m_0^{2k+1}(x)dx\right)^{(-2+k)t}; \end{aligned} \tag{13}$$

Способ 2

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0\left(\int l_0^k(x) \cdot m_0^{2k+1}(x)dx\right)^{3t}, \\ m_1 &= l_0^{-1} m_0^{-1}\left(\int l_0^k(x) \cdot m_0^{2k+1}(x)dx\right)^{(k-1)t}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $t = \left(k^2 + k + 1\right)^{-1}$; k — произвольная постоянная. Пара функций $(l_1; m_1)$ обратит тогда уравнение вида (11) в тождество. Новую пару $(l_1; m_1)$ можно выбрать в качестве исходной и с помощью формул (13) или (14) получить новую пару $(l_2; m_2)$ и т. д.

Таким образом, появляется возможность построения рекуррентными способами пар $(l_i; m_i)$ решений уравнения (11), содержащих в своей структуре свободные параметры, а затем по формулам (12) и полных решений параксиального уравнения (1).

С помощью данного метода авторами был получен ряд новых решений параксиального уравнения в элементарных функциях.

Список литературы

[1] *Shimoyama H.* // J. Electron. Microsc. 1982. V. 31. P. 127.

[2] *Голиков Ю.К., Кудрявин В.Г.* Рекуррентные способы получения точных решений параксиальных уравнений // Деп. в ВИНИТИ № 390–В95.

[3] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

Поступило в Редакцию
26 мая 1995 г.