

01;03
©1995

ЗАТУХАНИЕ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОЕ РЕЛАКСАЦИЕЙ ЗАРЯДА

С.О.Ширяева, А.И.Григорьев, В.А.Коромыслов

Исследование закономерностей реализации капиллярного волнового движения на заряженной поверхности жидкости представляет интерес в связи с разнообразными приложениями в физике, геофизике, технике и технологии (см. обзор [1]). Но несмотря на многообразные приложения к научным и практическим задачам и большое количество публикаций, сам феномен изучен пока не до конца. В частности, не достаточно полно изучен вопрос о влиянии конечности электропроводности реальной жидкости на особенности возникновения и эволюции в ней капиллярного волнового движения. Большая часть теоретических исследований обсуждаемого явления проводилась на идеализированных моделях идеально электропроводной или идеально диэлектрической жидкости. Незначительное количество теоретических исследований, проведенных с учетом конечности электропроводности и диэлектрической проницаемости жидкости (см., например, [2-4]), не заполнили имеющегося пробела в знании.

1. Будем решать задачу о расчете спектра и устойчивости капиллярных волн на безграничной плоской заряженной с плотностью κ_0 поверхности бесконечно глубокой идеальной несжимаемой жидкости с плотностью ρ , электропроводностью σ , диэлектрической проницаемостью ϵ и коэффициентом поверхностного натяжения γ , находящейся в поле сил тяжести и граничащей с вакуумом. Примем, что невозмущенная поверхность жидкости совпадает с плоскостью $z = 0$ декартовой системы координат, орт \mathbf{n}_2 которой направлен в сторону, противоположную направлению действия силы тяжести $\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$.

Математическая модель этой задачи состоит [2,5,6] из уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g}; \quad (1)$$

уравнения неразрывности поля скоростей

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (2)$$

уравнений Лапласа для нахождения потенциалов электрического поля в вакууме Φ_B и в жидкости $\Phi_{ж}$

$$\Delta\Phi_B = 0, \quad \Delta\Phi_{ж} = 0; \quad (3)$$

граничных условий на возмущенной капиллярным волновым движением свободной поверхности жидкости $z = \zeta(x, y, t)$:

кинематического

$$v_z \approx \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad (4)$$

динамического

$$\rho g\zeta + \rho \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \right) - P_E = 0, \quad (5)$$

(здесь Ψ — потенциал волнового движения, который можно ввести в силу уравнения (2); P_E — давление электрического поля на свободную поверхность);

условия неразрывности для поверхностного электрического заряда

$$-\sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{ж} + (\nu \cdot \nabla_*) \cdot \kappa + \frac{\partial\kappa}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

\mathbf{n} — вектор нормали к свободной поверхности жидкости; $\mathbf{E}_{ж}$ — напряженность электрического поля в жидкости;

$$\nabla_* \equiv \mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{n}_y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (7)$$

Плотность заряда $\kappa = \kappa(x, y, t)$, изменяющаяся от точки к точке в силу перетекания заряда вдоль поверхности при ее деформации капиллярным волновым движением, определяется соотношением [2]

$$4\pi\kappa = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_B - \varepsilon\mathbf{E}_{ж}), \quad (8)$$

\mathbf{E}_B — напряженность электрического поля в вакууме. Для электрического потенциала Φ на свободной поверхности жидкости должно выполняться условие непрерывности

$$\Phi_B = \Phi_{ж}, \quad (9)$$

а на большом расстоянии от поверхности жидкости — условия исчезновения возмущений электрического поля и поля

скоростей, вызванных капиллярными колебаниями поверхности:

$$\Phi_B = 4\pi\kappa_0 z; \quad (10)$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad \Phi_{ж} \rightarrow 0; \quad (11)$$

$$\Psi \rightarrow 0. \quad (12)$$

2. Пусть в жидкости распространяется плоская капиллярная волна весьма малой амплитуды ($a \ll k^{-1}$), вызывающая деформацию невозмущенной поверхности жидкости

$$\zeta = a \cdot \exp i(kx - \omega t), \quad (13)$$

где i — мнимая единица; k и ω — волновое число и частота соответственно. Потенциал скоростей движения жидкости, связанного с этой волной — решение гидродинамической задачи (1), (2), (4), (5), имеет вид [5]

$$\Psi = A \cdot \exp i(kx - \omega t) \cdot \exp(-kz). \quad (14)$$

Потенциал электрического поля поверхностного заряда над невозмущенной поверхностью жидкости имеет вид [6]

$$\Phi_B = -4\pi\kappa_0 \cdot z. \quad (15)$$

Потенциал электрического поля в жидкости под невозмущенной поверхностью постоянен и его можно принять равным нулю: $\Phi_{ж} = 0$.

При наличии возмущения свободной поверхности жидкости вида (13) равновесные потенциалы Φ_B и $\Phi_{ж}$ получают приращения φ_B и $\varphi_{ж}$ соответственно, имеющие тот же порядок малости, что и амплитуда возмущения поверхности ($\varphi_B \sim \varphi_{ж} \sim a$).

Решая задачу (3), (10)–(12), можно найти

$$\varphi_B = C_B \cdot \exp i(kx - \omega t) \cdot \exp(-kz);$$

$$\varphi_{ж} = C_{ж} \cdot \exp i(kx - \omega t) \cdot \exp(kz). \quad (16)$$

На свободной поверхности должно удовлетворяться условие (9)

$$-4\pi\kappa_0 \cdot \zeta + \varphi_B = \varphi_{ж} \quad (17)$$

и условие (6), откуда с учетом (7), (8) в линейном по ζ приближении получим

$$\varphi_B = 4\pi\kappa_0 \cdot \zeta \cdot \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{4\pi\sigma - i\omega(\varepsilon + 1)}. \quad (18)$$

Используя соотношение (18), найдем добавку давлению электрического поля на свободную поверхность жидкости, вызванную возмущением вида (13):

$$P_E(\zeta) \approx 4\pi\kappa_0^2 \cdot \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{4\pi\sigma - i\omega(\varepsilon + 1)} \cdot k \cdot \zeta. \quad (19)$$

Подставляя (4), (13), (14) и (19) в (5), несложно получить дисперсионное уравнение для капиллярных волн в рассматриваемой системе

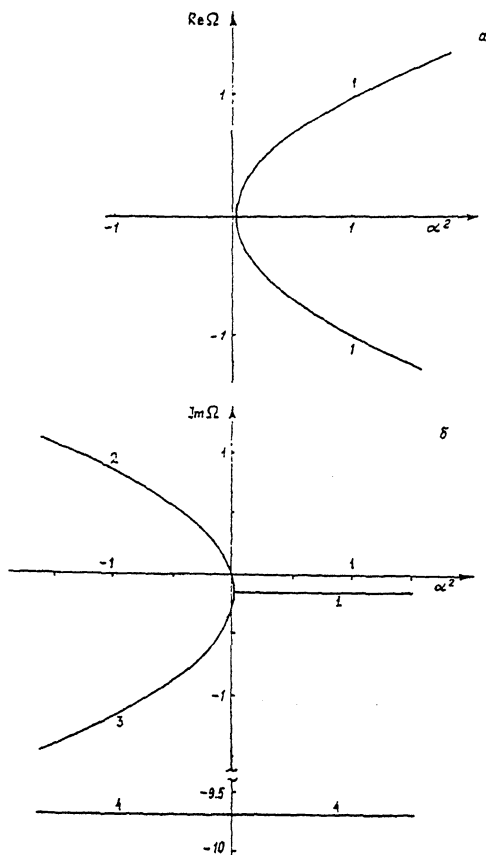
$$\rho\omega^2 - \rho g k - \gamma k^3 + 4\pi\kappa_0^2 k^2 \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{4\pi\sigma - i\omega(\varepsilon + 1)} = 0. \quad (20)$$

3. Дальнейший анализ уравнения (20) нужно проводить численно, но несложно заметить, что полученное дисперсионное уравнение отличается от дисперсионного уравнения для капиллярных волн в идеально проводящей жидкости [6] только дробным комплексным множителем в последнем слагаемом. При $\sigma \rightarrow \infty$ (или при $\varepsilon \rightarrow \infty$) обсуждаемый множитель превращается в единицу и соотношение (20) сводится к полученному Я.И. Френкелем [6]. Из выражения (20) видно, что заметного отличия капиллярных волновых движений в идеально проводящей и в реально проводящей жидкостях можно ожидать лишь при малой электропроводности σ и малой диэлектрической проницаемости ε реальной жидкости. Но в любом случае наличие обсуждаемого комплексного множителя приводит к качественному изменению структуры спектра капиллярных волн, для которых даже в идеальной жидкости появляется затухание. Это затухание связано не с вязкой диссипацией энергии капиллярного волнового движения (не учитываемого в используемой модели), а с джоулевым тепловыделением, появляющимся благодаря возникающему сдвигу фаз между гидродинамическим давлением и электрическим давлением $P_E(\zeta)$, которое не передает капиллярной волне энергию, как в случае капиллярного волнового движения на заряженной поверхности идеально проводящей жидкости, но отбирает ее у капиллярной волны, расходуя на создание приповерхностных релаксационных токов, энергия которых, в свою очередь, переходит в джоулево тепло.

Для удобства численного анализа введем безразмерные переменные

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_*^2}; \quad \delta = \frac{4\pi\kappa_0^2 k^2}{\rho\omega_*^2(\varepsilon + 1)}; \quad \beta = \frac{4\pi\sigma}{\omega_*(\varepsilon + 1)};$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_*^2}; \quad \omega_*^2 = \left(\frac{g\gamma}{\rho}\right)^{1/2}; \quad \omega_0^2 = \frac{\bar{k}}{\rho}(\rho g + \gamma k^2 - 4\pi\kappa_0^2 k),$$



Зависимости вещественной (а) и мнимой (б) компонент безразмерной частоты Ω капиллярного волнового движения от величины безразмерного параметра α^2 , характеризующего баланс давлений на свободной поверхности жидкости, рассчитанные при $\delta = 3$, $\beta = 10$.

в которых уравнение (20) примет вид

$$(\Omega^2 - \alpha^2)(\beta - i\Omega) + i\delta\Omega = 0. \quad (21)$$

Несложно видеть, что учет конечности электропроводности жидкости приводит к повышению порядка дисперсионного уравнения, которое для идеально электропроводной

жидкости ($\beta \rightarrow \infty$) имеет вид $\Omega^2 = \alpha^2$ [6]. Сразу видно, что при $\delta \sim 0$ кроме решений $\Omega_{1,2} = \pm\alpha$ появляется затухающее решение $\Omega_3 = -i\beta$.

На рис. 1 представлены результаты численного расчета по уравнению (21) в виде зависимости $\text{Re}\Omega = \text{Re}\Omega(\alpha^2)$ и $\text{Im}\Omega = \text{Im}\Omega(\alpha^2)$ при $\beta = 3$, $\delta = 10$. Как и следовало ожидать, при $\alpha^2 > 0$ все три ветви дисперсионного уравнения являются затухающими, при $\alpha^2 < 0$ ветвь 2 определяет инкремент неустойчивости заряженной поверхности, остальные две ветви определяют затухающие аperiодические движения.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // МЖГ. 1994. № 4. С. 3–22.
- [2] Melcher J.R., Schwarz W.J. // Phys. Fluids. 1968. V. 11. N 12. P. 2604–2616.
- [3] Melcher J.R., Smith C.V. // Phys. Fluids. 1969. V. 12. N 4. P. 778–790.
- [4] Новоселец М.К., Николаев В.С. // УФЖ. 1987. Т. 32. № 5. P. 713–718.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.

Ярославский
государственный
университет

Поступило в Редакцию
7 июня 1995 г.
