01;03;05;07

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА В ГИДРОДИНАМИКЕ И ТЕОРИИ ЛАЗЕРОВ

Э.М.Шахвердиев

Известно (см., например, [1,2]), что в поисках простой модели турбулентности Лоренц вывел три связанных дифференциальных уравнения для трех переменных x, y, z (в безразмерной форме):

$$\frac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + \gamma x - y,$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz.$$

Здесь σ — число Прандтля; $\gamma = RR_c^{-1}$, где R — число Рэлея, R_c — критическое число Рэлея (определяющее возникновение конвективной неустойчивости); $b = 4\pi^2(\pi^2 + k_1^2)^{-1}$, где k_1^2 — безразмерное волновое число. В частности, эта система уравнений привлекается для объяснения результатов эксперимента Бенара.

В эксперименте Бенара слой жидкости (с положительным коэффициентом объемного расширения) подогревается снизу в поле тяготения. Нагретая жидкость вблизи дна "стремится" подняться, а холодная вблизи крышки — опуститься, но этим движениям противодействуют вязкие силы. При малых разностях температур ΔT преобладает вязкость, жидкость покоится и тепло переносится постоянной теплопроводностью. Это состояние становится неустойчивым при критическом значении числа Рэлея.

Итак, σ и b — безразмерные константы, характеризующие систему; γ — управляющий параметр, пропорциональный ΔT. Переменная x пропорциональна скорости циркулирующей жидкости; y характеризует разность температур между восходящими и нисходящими потоками жидкости; z пропорциональна отклонению вертикального профиля температуры от равновесного значения. Уравнения (1) полностью идентичны уравнениям для лазера для E, P и D [1,2], где E и P — медленно меняющиеся амплитуды бегущих волн поля и поляризации; D — плотность инверсии.

Кроме этого, как это подчеркнуто в недавней работе [3] (см.также цитированную там раннюю литературу и [2]), сверхпроводник может рассматриваться как своеобразный лазер, генерирующий бозе-конденсат куперовских пар. Это означает, что система уравнений (1) также может быть применена для описания пространственно-временно́й динамики сверхпроводников в ряде случаев.

Хорошо известно, что уравнения (1) описывают по меньшей мере две неустойчивости, которые были найдены в лазерах и гидродинамике независимо. Одна из неустойчивостей реализуется, если $\gamma > 1$. При этом условии: а) устанавливается лазерная генерация (в лазерах); б) начинается конвективная неустойчивость в эксперименте Бенара [1].

В настоящем сообщении впервые условие $\gamma > 1$ получено путем применения асимптотического метода разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений по малому параметру к системе уравнений (1). Ранее этот метод применялся в других работах автора (см. [5−9] и приведенные там ссылки). Малыми параметрами системы принимая σ^{-1}, b^{-1} (согласно численным результатам (см. [4]), хаотическое поведение реализуется, если $\sigma = 10 > 1$, $b = \frac{8}{3} > 1$), после двукратного применения вышеназванного метода в нулевом приближении получаем

$$y(t) = y(0)\exp\left((\gamma - 1)t\right),$$
$$x(t) = x(0)\exp(-\sigma t) + y(0)(1 - \exp(-\sigma t)) + y(t) - y(0), \qquad (2)$$
$$z(t) = z(0)\exp(-bt),$$

где

$$y(0) = y\,(t = 0), \qquad x(0) = x\,(t = 0), \quad z(0) = z\,(t = 0).$$

Легко заметить, что если $\gamma > 1$, то в системе (1) развивается неустойчивость. Теперь проанализируем систему Лоренца (1) в случае, когда $b = 0$ и $\sigma > 1$, т. е. по-прежнему σ^{-1} считаем малым параметром задачи. Конечно, при $b = 0$ система несколько упрощается, однако нелинейности xz и yx остаются. Легко заметить, что после укорачивания системы (1) по σ^{-1} (т. е. при $\sigma^{-1} = 0$) оставшаяся система двух уравнений для y и z интегрируема точно [10]. Тогда в нулевом приближении по σ^{-1} для решения системы (1) получаем (подчеркнем, что речь идет о нетривиальном решении $y \not\equiv 0$):

$$y(t) = 4\alpha c \exp(c^{1/2}t)\left(4\alpha^2 c + \exp(2c^{1/2}t)\right)^{-1},$$
$$x(t) = x(0)\exp(-\sigma t) + y(0)(1 - \exp(-\sigma t)) + y(t) - y(0), \qquad (3)$$
$$z(t) = \gamma - 1 - y'(t)y^{-1}(t),$$

где

$$\alpha = y(0)\left[2c + 2(c(c - y^2/0))^{1/2}\right]^{-1},$$

$$c = y^2(0) + (\gamma - 1 - z(0))^2.$$

Анализ полученных выражений показывает: функция $y(t)$ стремится к стационарному решению после достижения максимального значения $y_{\max} = c^{1/2}$ при $t_{\max} = c^{-1/2}\ln(4\alpha c)$. На начальном участке зависимости $x(t)$ определяющую роль играет функция $\exp(-\sigma t)$. Характерные времена изменения $x(t)$ на этом участке $t_{\text{хар}} \sim \sigma^{-1}$; дальнейшее поведение $x(t)$ определяется функцией $y(t)$, которая играет также существенную роль в поведении $z(t)$.

Таким образом, одно из условий неустойчивостей в Лоренцевой модели получено методом асимптотического разложения решений сингулярно-возмущенных нелинейных уравнений по малому параметру. Интерес к этому методу может быть оправдан также и тем, что помимо получения известного условия $\gamma > 1$ он позволяет получить приемлемые асимптотические формулы для аналитически точно нерешаемой системы.

Автор выражает свою признательность Ю.М. Сеидову за инициирование настоящей работы и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Хакен Г.* Лазерная светодинамика. М.: Мир, 1988. 350 с.
[2] *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
[3] *Ораевский А.Н.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. В. 3. С. 981–985.
[4] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
[5] *Шахвердиев Э.М.* // ФТТ. 1992. Т. 34. № 2. С. 603–610.
[6] *Шахвердиев Э.М.* // Изв. вузов. Физика. 1993. Т. 36. № 12. С. 24–26.
[7] *Шахвердиев Э.М.* // ФТТ. 1994. Т. 36. № 1. С. 25–35.
[8] *Shahverdiev E.M.* // Physica B. 1993. V. 192. P. 274–278.
[9] *Shahverdiev E.M.* // Physica B. 1994. V. 193. P. 177–178.
[10] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ГИФМА, 1961. 1702 с.

Институт физики
Баку

Поступило в Редакцию
11 июля 1995 г.