07;09

ВЛИЯНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ЭВМ НА ПОВЕДЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СТРАННЫМИ АТТРАКТОРАМИ

В.В.Афанасьев, С.В.Михайлов, Ю.Е.Польский, А.Ю.Торопов

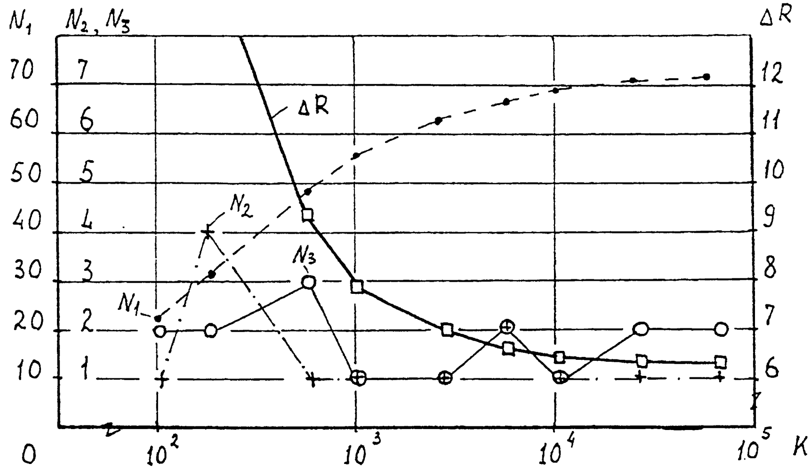
Сложные нелинейные динамические системы (ДС) со странным аттрактором (СА) являются в настоящее время объектом интенсивных научных исследований [1]. Основным, если не единственным, инструментом изучения таких систем во всем объеме фазового пространства является математическое моделирование их поведения при помощи ЭВМ [2]. Однако нам не известны работы, в которых были бы исследованы методологические вопросы моделирования на ЭВМ поведения таких сложных по характеру своего поведения систем, как ДС со СА, и необходимые ограничения при таком моделировании. Характерно, что во всех многочисленных работах по исследованию таких систем не приводятся данные по чисто машинным параметрам моделирования (шагу дискретизации, квантованию по уровню и т. п.).

С другой стороны, интерес к ДС со СА обусловлен тем, что в принципе строго детерминированная система введет себя случайным образом (динамический хаос). Однако в любых реальных физических системах всегда присутствует некоторый минимальный уровень случайных воздействий (шумов). При математическом моделировании роль этих случайных шумов играют вышеупомянутые параметры моделирования. По-видимому, впервые на это было указано в одной из основополагающих работ Ораевского А.Н. [3].

Известно также, что в ДС со СА происходит быстрое забывание начальных условий [4], вследствие этого следует ожидать сильного влияния шумов при моделировании поведения таких систем, особенно на начальном участке траектории в фазовом пространстве.

Целью работы является исследование влияния интервала дискретизации по времени Δt, при замене производных $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$ конечными приращениями $\Delta X/\Delta t$, $\Delta Y/\Delta t$, $\Delta Z/\Delta t$, на результаты моделирования на ЭВМ поведения ДС Лоренца

$$\dot{X} = \sigma(Y - X), \qquad \dot{Y} = rX - Y - XZ, \qquad \dot{Z} = XY - bZ. \quad (1)$$



Зависимости N_1, N_2, N_3, ΔR от K. N_1 — •, N_2 — +, N_3 — о, ΔR — □.

Моделирование проводилось при характерных параметрах системы $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ [2,4], что обеспечивало надежный дополнительный контроль результатов, с заданием начальных условий, близких к точкам равновесия:

$$\pm X_0 = \pm Y_0 = \pm\sqrt{b(r-1)}, \qquad Z_0 = r - 1.$$

Результаты сопоставлялись с данными работ [2,4], где было отмечено, что при этих условиях движение системы в фазовом пространстве происходит по раскручивающейся спирали с увеличением ее шага приблизительно на 6% за один виток. В качестве основного параметра при моделировании была выбрана безразмерная величина отношения квазипериода собственных колебаний $T_{\text{кол}}$ ДС при движении вблизи точки равновесия к интервалу дискретизации по времени Δt: $K = T_{\text{кол}}/\Delta t$ или $\Delta t_{\max} = T_{\text{кол}} \cdot K_{\min}^{-1}$.

Результаты моделирования представлены на рисунке, где N_i — число витков спирали в фазовом пространстве до i — перехода через седловидную структуру $(i = 1, 2, 3)$, а также относительное приращение шага ΔR спирали за один виток на начальном участке движения системы до первого перехода через седловидную структуру.

Данные, приведенные на рисунке, показывают, что поведение ДС на начальном участке до первого пересечения с седловидной структурой имеет асимптотический характер. С ростом параметра K число N_1 монотонно растет, стремясь к определенному значению. В то же время ΔR монотонно падает, стремясь к известной из [2,4] величине 6%. Уменьшение K (увеличение шумов дискретизации) приводит к резкому сокращению числа витков спирали в фазовом пространстве и соответственно к увеличению роста шага спирали за один виток. При исследовании ДС на начальном участке параметр дискретизации по времени $\Delta t_{\max}$ может быть определен аналитически, так как согласно [5,6]

$$T_{\text{кол}} \simeq 4\pi \left[8\sigma(r-1) - (\sigma + r)^2\right]^{-1/2}. \tag{2}$$

При этом величина ΔR может использоваться как достаточно надежный контрольный параметр моделирования.

Зависимость N_i от i показывает, что с ростом i стабилизация достигается при больших значениях параметра K. Это согласуется с известным фактом быстрого "забывания" ДС Лоренца начальных условий при возникновении странного аттрактора. Поэтому при исследовании поведения системы на достаточно больших временны́х интервалах (больших значениях индекса i) необходимо выбирать большие значения параметра K или, что то же самое, уменьшать $\Delta t_{\max}$.

Необходимо, однако, отметить, что увеличение K до значений, при которых Δt уменьшается ниже определенного предела $\Delta t_{\min}$, неизбежно приводит к резкому увеличению погрешности моделирования из-за уменьшения величины приращений ΔX, ΔY, ΔZ ниже порога квантования по уровню $\varepsilon = 2^{-n}$, определяемой разрядностью n ЭВМ. С учетом требования выполнения $\min(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z) > \varepsilon$ величина $\Delta t_{\min}$ определяется, согласно (1), неравенством

$$\Delta t_{\min} > \min\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(Y - X)}, \frac{\varepsilon}{rX - Y - XZ}, \frac{\varepsilon}{XY - bZ}\right),$$

откуда, максимизируя $\sigma(Y - X)$, $rX - Y - XZ$, $XY - bZ$, получаем

$$\Delta t_{\min} > 2^{-n} \cdot \min\left(\frac{1}{2\sigma\sqrt{b(r-1)}}, \frac{1}{(3r-2)\sqrt{b(r-1)}}, \frac{1}{2b(r-1)}\right). \tag{3}$$

Так, например, при указанных выше параметрах системы Лоренца, при $n = 32$, $\Delta t_{\min} > 3.4 \cdot 10^{-13}$.

Полученные результаты позволяют определить области допустимых значений интервала дискретизации Δt и параметра K при корректном моделировании на ЭВМ поведения ДС типа Лоренца

$$\Delta t_{\max} > \Delta t > \Delta t_{\min}, \qquad T_{\text{кол}}/\Delta t_{\max} < K < T_{\text{кол}}/\Delta t_{\min}. \tag{4}$$

В наших исследованиях наименьшая величина $\Delta t \simeq 10^{-12}$. Сопоставление результатов, полученных разными авторами при моделировании поведения ДС со СА на ЭВМ, возможно, по нашему мнению, только при согласованных значениях параметров K и n, при которых проводилось математическое моделирование, и эти данные, следовательно, необходимо включать в содержание работы.

При моделировании ДС со СА шумы дискретизации принципиально неустранимы, так же как в реальных ДС неустранимы полностью случайные воздействия, обусловленные флуктуациями (пусть и очень малыми) параметров системы. Строгое решение систем уравнений типа (1), описывающих ДС со СА в аналитической форме, в настоящее время получить не удается. Поэтому ответить однозначно на принципиальный вопрос, возникнет ли в системе "динамический хаос" в отсутствие таких малых возмущений (т. е. в строго детерминированной системе), не представляется возможным. Вероятно, что возникновение "динамического хаоса" обусловлено особым характером поведения ДС со СА при переходе через седловидную структуру в фазовом пространстве и своеобразным нелинейным усилением этих флуктуаций.

Выводы

1. Моделирование на ЭВМ поведения ДС со СА следует производить при выборе параметра K, удовлетворяющего неравенству (4).
2. Шумы дискретизации при моделировании оказывают влияние на поведение ДС со СА, возрастающее с уменьшением K, поэтому все результаты математического моделирования поведения ДС должны обязательно сопровождаться указанием величины K или Δt и оценкой величины $\Delta t_{\min}$.
3. Критериями правильности выбора параметра K могут служить неизменность числа витков спирали в фазовом пространстве при относительно малом увеличении K на стадии зарождения СА до первого перехода через седловидную структуру, а также приращение шага спирали ΔR за один виток.

Работа выполнена по Международной Соровской программе Образование в области точных наук (Соровский доцент).

Список литературы

[1] *Хакен Г.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 423 с.

[2] *Странные аттракторы* / Под ред. Я.Г. Синай, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. 253 с.

[3] *Ораевский А.Н.* // Квантовая электроника. 1981. Т. 8. № 1. С. 130–142.

[4] *Лихтенберг А., Либерман М.* // Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.

[5] *Афанасьев В.В., Польский Ю.Е.* // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 18. С. 86–90.

[6] *Афанасьев В.В., Польский Ю.Е.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 8. С. 57–60.

Казанский государственный
технический университет
им. А.Н. Туполева

Поступило в Редакцию
12 сентября 1995 г.