Письма в ЖТФ, том 21, вып. 24 26 декабря 1995 г.

05;09

О СПЕКТРЕ СЛУЧАЙНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО СИГНАЛА

Б.И.Якубович

Рассмотрим случайный сигнал, который может принимать одно из двух возможных значений, обычно называемый случайным телеграфным сигналом. К случайному сигналу такого вида сводятся многие стохастические процессы, протекающие в различных физических системах. Вследствие этого часто возникает необходимость анализировать случайный телеграфный сигнал при проведении исследований в различных областях физики и при решении многочисленных технических задач. Важной и во многом определяющей характеристикой случайного сигнала является его спектр. До настоящего времени спектр случайного телеграфного сигнала вычислялся с учетом условий, свойственных рассматриваемой конкретной физической или технической задаче, которые естественно приводят к ограничениям общности построения спектра сигнала и делают результат применимым лишь для конкретных физических процессов и объектов. В связи с широким распространением стохастических процессов, приводящих к случайному телеграфному сигналу, а также принципиальной и практической важностью вычисления спектра такого сигнала во многих случаях представляет значительный интерес вычисление спектра случайного телеграфного сигнала в достаточно общем виде, который мог бы быть использован для анализа многих физических процессов, имеющих такую форму. Решению этой задачи посвящена данная статья.

Рассматриваем случайный сигнал, который может находиться в двух состояниях — амплитуда сигнала принимает одно из двух возможных значений. Вид сигнала определяется значениями амплитуд и распределенями времен нахождения сигнала в каждом состоянии. Вычислим спектр такого случайного сигнала. Не ограничивая общности, можно рассматривать случайный сигнал с нулевым средним значением. В этом случае

$$A\langle\tau\rangle - B\langle\theta\rangle = 0,$$

где A и B — значения амплитуд сигнала; $\langle\tau\rangle$ и $\langle\theta\rangle$ — соответствующие им средние времена нахождения сигнала в каждом состоянии, определяемые как $\langle\tau\rangle = \int\limits_0^\infty \tau u(\tau)d\tau$, $\langle\theta\rangle = \int\limits_0^\infty \theta w(\theta)d\theta$; $u(\tau)$, $w(\theta)$ — функции распределения времен. Рассматриваем весьма общий случай: вероятность перехода сигнала из одного состояния в другое зависит от времени нахождения сигнала в данном состоянии и не зависит от предшествующих событий, рассматривается случай произвольных статистических связей и соответственно произвольных распределений $u(\tau)$ и $w(\theta)$. Данный случайный сигнал представляет собой импульсный стохастический процесс. Вычислим его спектр, считая рассматриваемый стохастичсекий процесс стационарным.

Импульс процесса с длительностью $\tau+\theta$ имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \tau, \\ -B, & \tau < t < \tau+\theta. \end{cases}$$

Рассматриваемый случайный сигнал представляет собой случайную последовательность импульсов

$$X(t) - \sum_{j=1}^{n} x(t-\tau_1-\theta_1\ldots-\tau_{j-1}-\theta_{j-1},\tau_j+\theta_j).$$

Преобразование Фурье имеет вид

$$F(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-2\pi ift}dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} e^{-2\pi if(\tau_1+\theta_1+\ldots+\tau_{j-1}+\theta_{j-1})} F_0(f,\tau_j+\theta_j),$$

где

$$F_0(f_j\tau_j+\theta_j) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t,\tau_j+\theta_j)e^{-2\pi ift}dt.$$

Тогда

$$|F(f)|^2 = \sum_{j=1}^{n} |F_0(f,\tau_j+\theta_j)|^2 +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j} e^{2\pi if(\tau_j+\theta_j+\ldots+\tau_{j+i-1}+\theta_{j+i-1})}\times$$

$$\times F_0(f,\tau_j+\theta_j)f_0^*(f,\tau_{j+i}+\theta_{j+i}).$$

Рассчитываем среднее по ансамблю $\langle|F(f)|^2\rangle$, используя независимость параметров в рассматриваемой последовательности импульсов

$$\left\langle|F(f)|^2\right\rangle=\sum_{j=1}^{n}\left\langle|F_0(f,\tau_j+\theta_j)|^2\right\rangle+2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j}\langle F_0^*(f,\tau_{j+i}+\theta_{j+i})\rangle\times$$

$$\times\left\langle F_0(f,\tau_j+\theta_j)e^{2\pi if(\tau_j+\theta_j)}\right\rangle$$

$$\left\langle e^{2\pi if(\tau_{j+1}+Q_{j+1})}\right\rangle\dots\left\langle e^{2\pi if(\tau_{j+i-1}+Q_{j+i-1})}\right\rangle.$$

Вычисляем спектральную плотность рассматриваемого стохастического процесса, учитывая его стационарность:

$$S(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{\left\langle|F(f)|^2\right\rangle}{T}=$$

$$=\nu\left(\left\langle|F_0(f,\tau+\theta)|^2\right\rangle+2\mathrm{Re}\frac{\langle F_0^*(f,\tau+\theta)\rangle\left\langle F_0(f,\tau+\theta)e^{2\pi i_(\tau+\theta)}\right\rangle}{1-\left\langle e^{2\pi if(\tau+\theta)}\right\rangle}\right),$$

где $\nu=\lim_{T\to\infty}\frac{n}{T}$ — среднее число импульсов в единицу времени. Очевидно, что $\nu=\frac{1}{\langle\tau\rangle+\langle\theta\rangle}$. Вычислим теперь преобразование Фурье одиночного импульса $F_0(f,\tau+\theta)$:

$$F_0(f,\tau+\theta)=\int_0^\infty x(t,\tau+\theta)e^{-2\pi ift}dt=$$

$$=A\left(\int_0^\tau e^{-2\pi ift}dt-\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\int_\tau^{\tau+\theta}e^{-2\pi ift}dt\right)=$$

$$=\frac{A}{-2\pi if}\left[\left(1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\right)e^{-2\pi ift}-\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}e^{-2\pi if(\tau+\theta)}-1\right].$$

В итоге получаем выражение для спектральной плотности случайного телеграфного сигнала следующего вида

$$S(f)=\frac{A^2}{2\pi^2f^2(\langle\tau\rangle+\langle\theta\rangle)}\left(G(f)+\mathrm{Re}H(f)\right),$$

$$G(f)=1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}+\frac{\langle\tau\rangle^2}{\langle\theta\rangle^2}-\left(1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\right)\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\langle\cos 2\pi f\theta\rangle-$$

$$-\left(1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\right)\langle\cos 2\pi f\tau\rangle+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\langle\cos 2\pi f(\tau+\theta)\rangle$$

$$H(f)=\left[(1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle})\left\langle e^{2\pi i f\theta}\right\rangle-\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}-\left\langle e^{2\pi i f(\tau+\theta)}\right\rangle\right]\times$$

$$\times\left[\left(1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\right)\left\langle e^{2\pi i f\tau}\right\rangle-\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\left\langle e^{2\pi i f(\tau+\theta)}\right\rangle-1\right]\Big/$$

$$\left(1-\left\langle e^{2\pi i f(\tau+\theta)}\right\rangle\right).$$

Таким образом, вычислен спектр случайного телеграфного сигнала в весьма общем случае. В более частных случаях, когда имеются конкретные функции распределения времен в каждом состоянии, в результате подстановки этих функций в полученную формулу выражение для спектральной плотности сигнала может быть значительно упрощено. В простом случае, когда переходы с одного уровня на другой случайны и независимы друг от друга и соответственно времена распределены по закону Пуассона $u(\tau)=\frac{1}{\tau_0}e^{-\tau/\tau_0}$, $w(\theta)=\frac{1}{\theta_0}e^{-\theta/\theta_0}$, полученное выражение для спектра сигнала приобретает вид

$$S(f)=\frac{2A^2\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\cdot\frac{\frac{1}{\langle\theta\rangle}+\frac{1}{\langle\tau\rangle}}{4\pi^2f^2+\left(\frac{1}{\langle\theta\rangle}+\frac{1}{\langle\tau\rangle}\right)^2}.$$

Такое выражение было получено Махлупом [1] для случая статистически независимых переходов. В более частной ситуации, когда средние времена нахождения в обоих состояниях одинаковы $\langle\tau\rangle=\langle\theta\rangle$, спектр случайного телеграфного сигнала приобретает широко известный вид

$$S(f)=\frac{A^2\langle\tau\rangle}{1+\pi^2f^2\langle\tau\rangle^2}.$$

Спектр для этого случая был вычислен Райсом [2] и часто называется лоренцевским спектром.

В результате проведенной работы вычислен спектр случайного телеграфного сигнала в достаточно общем виде. Полученный спектр может быть использован для анализа стохастических процессов, имеющих форму случайного телеграфного сигнала, независимо от их физической природы, а также при решении многих технических задач. То есть для широкой категории стохастических процессов, встречающихся в различных областях физики и многих отраслях техники, не понадобится проводить вычисление спектра процесса, так как он может быть определен из общей формулы, полученной в данной статье. Кроме того, полученная формула позволят определить общие закономерности спектра случайного телеграфного сигнала.

Список литературы

[1] *Machlup S.* // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. N 3. P. 341–343.

[2] *Rice S.* // Bell. Syst. Tech. J. 1945. V. 24. N 1. P. 46–156.

Петербургский
институт
ядерной физики
РАН

Поступило в Редакцию
17 сентября 1995 г.