

01;03

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАПИЛЛЯРНЫХ ЗАРЯДОВО-РЕЛАКСАЦИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ

© С.О.Ширяева, А.И.Григорьев, В.А.Коромыслов

В связи с широким спектром разнообразных приложений в физике, геофизике, технике и технологии появилось довольно много публикаций, посвященных исследованию закономерностей реализации капиллярного волнового движения на заряженной поверхности жидкости (см. обзор [1]). Однако при этом целому ряду направлений в этой области до сих пор не уделялось должного внимания. В частности, не достаточно полно изучен вопрос о влиянии конечности электропроводности реальной жидкости на особенности возникновения и устойчивости капиллярных движений жидкости. Незначительное количество теоретических исследований, проведенных с учетом конечности электропроводности и диэлектрической проницаемости жидкости (см., например, [2-5]), не внесли полной ясности в специфические особенности реализации феномена. Предварительный анализ обсуждаемой задачи (см. [5]) показывает, что учет конечности скорости выравнивания электрического потенциала в реальной жидкости приводит к увеличению порядка дисперсионного уравнения на единицу, т. е. к появлению еще одной ветви капиллярных движений. Кроме того, при варьировании физических параметров задачи: поверхностной плотности заряда, диэлектрической проницаемости, удельной электропроводности происходит деформация и перезамыкание друг на друга различных ветвей дисперсионного уравнения, что свидетельствует об изменении физического смысла реализующихся в новых условиях движений жидкости.

1. Рассмотрим задачу о спектре и устойчивости капиллярных волн на граничащей с вакуумом плоской поверхности бесконечно глубокой несжимаемой жидкости с вязкостью ν , плотностью ρ , проводимостью λ , коэффициентом поверхностного натяжения σ , диэлектрической проницаемостью ϵ , находящейся под воздействием гравитационного поля g и внешнего однородного электростатического поля, вектор напряженности E_0 которого направлен перпендикулярно невозмущенной плоской поверхности жидкости ($E_0 = 4\pi\kappa_0$, κ_0 — поверхностная плотность индуцированного заряда). Пусть $\xi(x, t)$ — малое возмущение равновесной

плоской поверхности жидкости, а $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей движения жидкости, вызванного возмущением ξ .

Система уравнений гидродинамики, разрешающая поставленную задачу, линеаризованная по малым величинам \mathbf{U} и ξ , имеет вид [2,3]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{U}) + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0; \quad (2)$$

$$\mathbf{U} \Big|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0; \quad (3)$$

$$\left[-\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} + U_z \right] \Big|_{z=0} = 0; \quad (4)$$

$$\left[\left(\Pi_\tau^{(2)} - \Pi_\tau^{(1)} \right) - \rho \nu [\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}] \right] \Big|_{z=0} = 0; \quad (5)$$

$$[-P(\mathbf{U}) + \rho g \xi + 2\rho \nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} - P_E(\xi) + P_\sigma(\xi)] \Big|_{z=0} = 0, \quad (6)$$

где индекс 1 относится к жидкости, 2 — к внешней среде; $P(\mathbf{U})$, $P_E(\xi)$, $P_\sigma(\xi)$ — добавки к давлению внутри жидкости при наличии электрического поля, давлению электрических сил и давлению сил поверхностного натяжения, вызванные возмущением поверхности ξ и имеющие первый порядок малости по величинам \mathbf{U} и ξ ; $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ — орты нормали и касательных к поверхности жидкости; $\Pi_\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_n E_\tau$; E_n, E_τ — нормальная и касательная компоненты напряженности электрического поля.

Систему (1)–(6) следует дополнить электродинамическими уравнениями, учитывающими эффект релаксации электрического заряда:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_i = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_2 \Big|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow \mathbf{E}_0; \quad \mathbf{E}_1 \Big|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0; \quad (8)$$

$$z = \xi: \quad E_{2n} - \varepsilon E_{1n} = 4\pi \kappa; \quad \Phi_1 = \Phi_2; \quad (9)$$

$$z = \xi: \quad -\lambda(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1) + (\mathbf{U} \cdot \nabla_\Sigma) \kappa + \frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

Φ_i — электрический потенциал, $\kappa(x, t)$ — поверхностная плотность заряда, ∇_Σ — двумерный оператор “набла”.

2. Решая задачу методом разделения поля скоростей на потенциальную и вихревую компоненты, как это делалось в [6], или методом скаляризации, описанным в [7], несложно

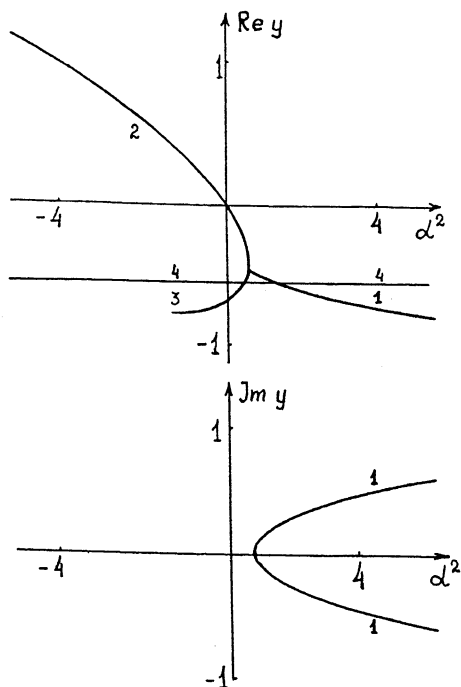


Рис. 1. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты y капиллярного движения жидкости от величины безразмерного параметра α^2 , характеризующего баланс давлений на свободной поверхности жидкости, рассчитанные при $\delta = 0.0001$; $\varepsilon = 100$; $\gamma = 5$.

получить дисперсионное уравнение (s — комплексная частота):

$$\left[4\pi\gamma + (\varepsilon + 1)y \right] \left\{ \alpha^2 + 4 \left[\left(1 + \frac{1}{2}y \right)^2 - \sqrt{1+y} \right] \right\} - 2\delta \left[1 - \sqrt{1+y} \right] = 0; \quad (11)$$

$$y = \frac{s}{k^2\nu}; \quad \alpha \equiv \frac{s_0}{k^2\nu}; \quad \delta \equiv \frac{4\pi\kappa_0^2 k^2}{(k^2\nu)^2 \rho};$$

$$\gamma \equiv \frac{\lambda}{k^2\nu}; \quad s_0^2 \equiv \frac{k}{\rho} (\sigma k^2 + g\rho - 4\pi\kappa_0^2 k).$$

Легко заметить, что уравнение (11) имеет на единицу более высокий порядок, чем дисперсионное уравнение без учета эффекта релаксации заряда [8] (получающееся из (11) при $\gamma \rightarrow \infty$). Кроме ветвей капиллярных волн, обычных

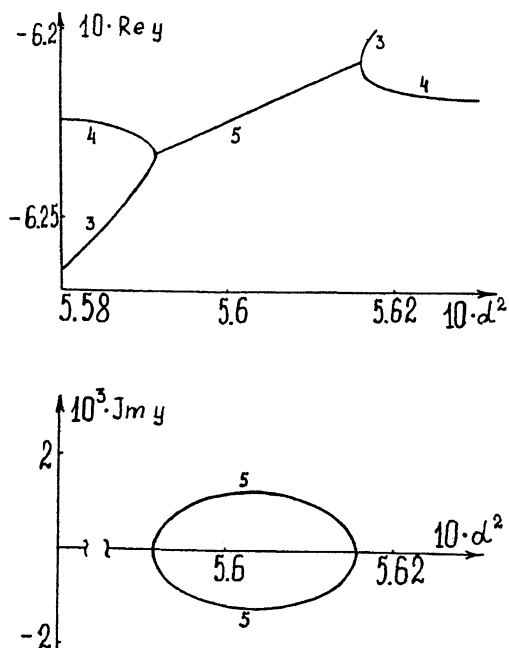


Рис. 2. Мелкомасштабная структура спектра капиллярных движений жидкости при $\delta = 0.0001$, $\varepsilon = 100$, $\gamma = 5$, не различимая на рис. 1.

для плоской заряженной поверхности жидкости, появляется еще одна ветвь затухающих движений жидкости, связанных с перераспределением заряда по поверхности жидкости при деформации поверхности, которую естественно назвать ветвью зарядово-релаксационных движений.

Результаты численных расчетов по (11) при $\delta = 0.0001$; $\varepsilon = 100$ проиллюстрированы рис. 1–3. На рис. 1 и рис. 2 приведены данные расчетов при $\gamma = 5$, на рис. 3 — при $\gamma = 3$. На рис. 2 представлена мелкомасштабная структура капиллярных зарядово-релаксационных движений, неразличимая на рис. 1 (топографически соответствующая точке пересечения кривых 3 и 4 на рис. 1).

В отсутствие эффекта релаксации заряда спектр капиллярных движений жидкости определяется ветвями 1–3 на рис. 1. Часть ветви 2, лежащая в области $\alpha^2 < 0$, соответствует реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля. Учет конечности скорости перераспределения заряда при деформации поверхности жидкости приводит к появлению ветвей 4 и 5. Ветвь 4 соответствует аperiodическому затуханию релаксационных движений, ее положение (ордината) на плоскости $\text{Re } y - \alpha^2$ примерно определяется отношением γ/ε . Ветвь 5 — соответствует возникновению зарядово-релаксационного волнового движения.

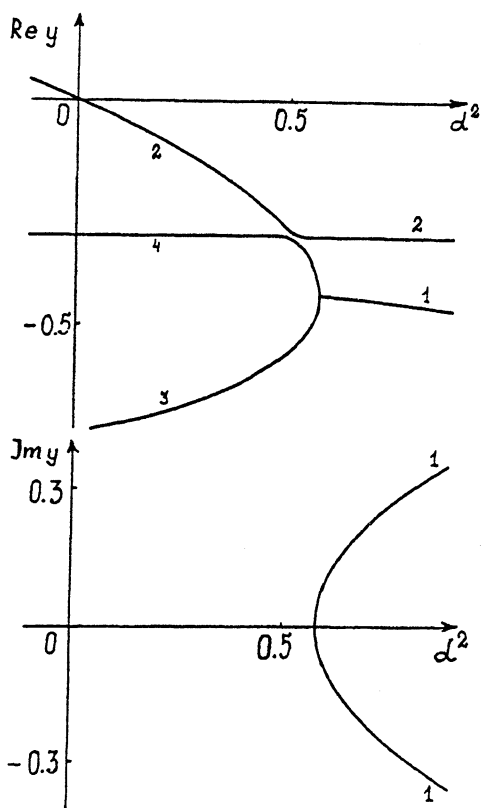


Рис. 3. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты y капиллярного движения жидкости от величины безразмерного параметра α^2 , характеризующего баланс давлений на свободной поверхности жидкости, рассчитанные при $\delta = 0.0001$, $\epsilon = 100$, $\gamma = 3$.

Численные расчеты показывают, что с увеличением параметра γ (характеризующего проводимость жидкости) область существования зарядово-релаксационных движений жидкости расширяется. При уменьшении параметра γ точка ветвления кривых 1-3 опускается вниз, а ветвь зарядово-релаксационных волновых движений 5 сливается с ветвью капиллярных волн 1. При $\gamma \approx 4.374$ происходит перезамыкание ветви 2 на ветвь аperiodических зарядово-релаксационных движений 4. Наиболее важным следствием такой деформации структуры спектра капиллярных движений жидкости является то обстоятельство, что ветвь, соответствующая неустойчивости заряженной поверхности жидкости (неустойчивости Тонкса-Френкеля), становится продолжением ветви аperiodических зарядово-

релаксационных движений жидкости и никак не связана с капиллярным волновым движением. Это может свидетельствовать в пользу мнения, что механизмы реализации неустойчивости заряженной поверхности плохо и хорошо проводящих жидкостей различны. К такому же заключению можно прийти, основываясь на описаниях экспериментов по исследованию неустойчивости заряженных поверхностей различных жидкостей, выполненных Зелени [10].

Отметим в заключение, что сами зарядово-релаксационные движения порождаются отставанием по фазе между капиллярными движениями жидкости, деформирующими поверхность, и связанными с ними токами перераспределяющегося заряда, диссипирующими энергию на джоулево тепловыделение.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // МЖГ. 1994. № 4. С. 3–22.
- [2] Melcher J.R., Schwarz W.J. // Phys. Fluids. 1968. V. 11. N 12. P. 2604–2616.
- [3] Melcher J.R., Smith C.V. // Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 4. P. 778–790.
- [4] Новоселец М.К., Николаев В.С. // УФЖ. 1987. Т. 32. № 5. С. 713–718.
- [5] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. В. 19. С. 77–81.
- [6] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [7] Ширяева С.О., Лазарянц А.Э. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач / Препринт ИМРАН № 27. Ярославль, 1994. 126 с.
- [8] Алиев И.Н., Филиппов А.В. // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 94–98.
- [9] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. № 9. С. 12–21.
- [10] Zeleny J. // Phys. Rev. 1917. V. 10. N 1. P. 1–6.

Ярославский
государственный
университет

Поступило в Редакцию
13 декабря 1995 г.