Письма в ЖТФ, том 22, вып. 5 12 марта 1996 г.

01;03

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВТОРЫХ МОМЕНТОВ В СПИРАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© *А.В.Белян, Е.Б.Гольбрайх, С.С.Моисеев, О.Г.Чхетиани*

Спиральная турбулентность занимает особое место среди разнообразных видов турбулентности, исследуемых в последние годы. Особый интерес к ней вызван, в частности тем, что, по всей видимости, она обеспечивает один из основных механизмов усиления и поддержания магнитных полей в астрофизических объектах (так называемый α-эффект [1]) и генерацию крупномасштабных геофизических вихрей [2]. Со спиральностью связаны эффекты увеличения турбулентной диффузии пассивного скаляра и уменьшения турбулентной вязкости как гидродинамического поля скорости, так и магнитного поля [3–7]. В настоящей работе, как и в [6,7], мы учитываем конечность времени корреляции при помощи двухмасштабного аналога диффузионного приближения Орзага [8]. Этот подход аналогичен другим традиционным турбулентным "замыканиям второго порядка" [9]. Для простоты мы рассматриваем гауссовую турбулентность, однако учет негауссовости не представляет труда и не ведет к существенной модификации результата.

Рассмотрим эволюцию слабой *случайной* крупномасштабной неоднородности, возникающей на фоне однородной турбулентности. Положим, что средняя компонента возмущенного поля скорости равна 0($\langle U_i \rangle = 0$). В этом случае представим u'_i как

$$u'_i - u^0_i = u^1_i, \qquad \mathbf{u}^1 \ll \mathbf{u}^0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}^0$ описывает однородную невозмущенную турбулентность, а $\mathbf{u}^1$ — слабонеоднородное возмущение турбулентности. Невозмущенное поле скорости $\mathbf{u}^0$ определяется уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}u^0_i(\mathbf{x},t) + u^0_k(\mathbf{x},t)\frac{\partial}{\partial x_k}u^0_i(\mathbf{x},t) - \nu\Delta u^0_i(\mathbf{x},t) =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}P^0(\mathbf{x},t) + F_i(\mathbf{x},t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} u_k^0(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{3}$$

Для возмущения турбулентности получаем линеаризованное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i^1(\mathbf{x}, t) + u_k^0(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} u_i^1(\mathbf{x}, t) + u_k^1(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} u_i^0(\mathbf{x}, t) =$$

$$= \nu \Delta u_i^1(x, t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} P(\mathbf{x}, t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} u_k^1(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{5}$$

Введем следующие обозначения для парных моментов:

$$Q_{ij}^{00}(\mathbf{x}, t, x', t') = \langle u_i^0(\mathbf{x}, t) u_j^0(\mathbf{x}', t') \rangle,$$

$$Q_{ij}^{10}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \langle u_i^1(\mathbf{x}, t) u_j^0(\mathbf{x}', t') \rangle. \tag{6}$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta_x \right) Q_{ij}^{10}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} P_j^{10}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_k} \Big(Q_{ikj}^{100}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') + Q_{kij}^{100}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \Big), \tag{7}$$

где третьи моменты определяются как [6].

$$Q_{ipj}^{100}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t', \mathbf{x}'', t'') = -\tau^* \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\delta_{im} - \frac{\nabla_i \nabla_m}{\Delta} \right) \times$$

$$\times \Big(Q_{mp}^{10}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') Q_{kj}^{00}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}'', t'') +$$

$$+ Q_{mj}^{10}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}'', t'') Q_{kp}^{00}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') +$$

$$+ Q_{kp}^{10}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') Q_{mj}^{00}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}'', t'') +$$

$$+ Q_{kj}^{10}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}'', t'') Q_{mp}^{00}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \Big). \tag{8}$$

Время релаксации $\tau^* \approx 4\mu L_{tur}/E_{tur}^{1/2}$, где L_{tur} — интегральный масштаб турбулентности, E_{tur} — средняя энергия турбулентных движений. При определенных условиях для времени релаксации можно получить функциональное уравнение (см., например, [10]).

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{E} = Q_{ii}^{10}(\boldsymbol{\xi}, \tau, \mathbf{x}, t),$$

$$\tilde{H} = \varepsilon_{ipk} \frac{\partial}{\partial \xi_p} Q_{ki}^{10}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau, \mathbf{x}, t), \tag{9}$$

характеризующие энергию и спиральность возмущения турбулентности. Для них получаем следующую систему уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \tilde{\nu} \Delta_\xi\right) \tilde{E} - \alpha \tilde{H} = A_1(\xi, \tau),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \tilde{\nu} \Delta_\xi\right) \tilde{H} + \alpha \Delta_\xi \tilde{E} = A_{22}(\boldsymbol{\xi}, \tau). \tag{10}$$

Здесь

$$\nu_t = \frac{\langle \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0 \rangle}{3} \cdot \tau^*, \quad \alpha = -\frac{\langle \mathbf{u}_0 rot \mathbf{u}_0 \rangle}{2} \cdot \tau^*, \tilde{\nu} = \nu + \nu_t,$$

$$A_1(\boldsymbol{\xi}, \tau) =$$

$$= \tau^* \left[\frac{\partial Q_{ip}^{10}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t)}{\partial x_k} \frac{\partial Q_{ki}^{00}(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \xi_p} + Q_{kp}^{10}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 Q_{ii}^{00}(\xi, \tau)}{\partial \xi_k \partial \xi_p} \right],$$

$$A_2(\xi, \tau) =$$

$$= \tau^* \varepsilon_{ilj} \left[\frac{\partial Q_{ip}^{10}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 Q_{kj}^{00}(\xi, \tau)}{\partial \xi_p \partial \xi_l} + Q_{kp}^{10}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t) \frac{\partial^3 Q_{ij}^{00}(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \xi_k \partial \xi_p \partial \xi_l} \right].$$

Проведя фурье-преобразование системы (10) и решая ее относительно фурье-образов $\hat{\tilde{E}}(\mathbf{k}, w)$, $\hat{\tilde{H}}(\mathbf{k}, \mathbf{w})$, получим, что

$$\hat{\tilde{E}} = \frac{(\tilde{\nu} k^2 - iw) \hat{\tilde{A}}_1 + \alpha \hat{\tilde{A}}_2}{(\tilde{\nu} k^2 - iw)^2 - \alpha^2 k^2},$$

$$\hat{\tilde{H}} = \frac{(\tilde{\nu} k^2 - iw) \hat{\tilde{A}}_2 + \alpha k^2 \hat{\tilde{A}}_1}{(\tilde{\nu} k^2 - iw)^2 - \alpha^2 k^2}, \tag{11}$$

откуда инкремент $\gamma = iw$ определяется условием

$$\gamma = \pm \alpha k - \tilde{\nu} k^2. \tag{12}$$

Удивительным образом выражение для инкремента совпадает с инкрементом в теории α^2-динамо [1]. Очевидно, что при масштабах $k_* < |\alpha|/\tilde{\nu}$ система (10) неустойчива.

Важно отметить, что область неустойчивости не попадает в область невозмущенной однородной турбулентности, а расположена при *бо́льших* масшатабах. В самомм деле, как показано в [1] для аналогичного уравнения (смотри формулу (1.84) и ниже), $k_* < k_{tur}$ (где k_{tur} — внешний масштаб турбулентности) вследствие положительной определенности корреляционного тензора. При рассморении устойчивости однородного турбулентного состояния у нас нет физических причин, ограничивающих масштабы возмущения, — они, естественно, не превосходят масштабы системы. Но последние отнюдь не совпадают с внешним масштабом турбулентности, который определяется лишь масштабом источника.

Таким образом, однородная спиральная турбулентность неустойчива по отношению к слабо неоднородным случайным возмущениям с $k > k_{tur}$ (на линейной стадии). На этих масштабах происходит рост как энергии, так и спиральности. Крупномасштабная часть возмущения как бы "подсасывает" энергию из мелких масштабов. Подобный эффект генерации парадных моментов для обычной гидродинамики впервые получен в такой простой постановке задачи. Нелишне заметить, что подобно предыдущему рассмотрению существует генерация корреляционных характеристик смешанного типа в задаче магнитного динамо [11], ведущая к росу крупномасштабных флуктуаций магнитного поля.

Эта неустойчивость может играть существенную роль при самоорганизации структур на фоне однородной турбулентности при слабом крупномасштабном ее возмущении, в котором изначально содержатся все масштабы, и вести к установлению "дальнего порядка". На линейной стадии неустойчивость ведет к перераспределнию энергии по спектру — ее переносу из области малых в крупные масштабы. Очевидно, что включающаяся нелинейность приводит к установлению нового равновесного состояния. Эффект свидетельствует о квазиравновесном характере спиральной турбулентности и ее внутренней неустойчивости по отношению к крупномасштабным возмущениям.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 94–01–01241).

Список литературы

[1] *Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А.* Турбулентное динамо в астрофизике. М., 1980. 352 с.
[2] *Моисеев СС., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Шукуров А.М.* ДАН. 1983. Т. 273. С. 549–552.
[3] *Kraichman R.H.* // J. Fluid Mech. 1976. V. 77. P. 753–768.
[4] *Knobloch E.* // J. Fluid Mech. 1977. V. 83. P. 129–140.

[5] *Долгинов А.З., Силантьев Н.А.* // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 159–171.
[6] *Белян А.В., Моисеев С.С., Чхетиани О.Г.* // М., 1992. ИКИ РАН. Пр.-1845. 22 с.
[7] *Белян А.В., Моисеев С.С., Чхетиани О.Г.* // ДАН. 1994. Т. 334. Р. 14–20.
[8] *Orszag S.A.* // J. Fluid Mech. 1970. V. 41. P. 363–386.
[9] *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Т. 1. СПб., 1992. 694 с.
[10] *Вайнштейн С.И.* Магнитные поля в космосе. М.: Наука, 1983. Гл. 4. 238 с.
[11] *Белян А.Б., Гольбрайх Е.Б., Моисеев С.С., Чхетиани О.Г.* // М., 1995. ИКИ РАН. Пр.-1932. 12 с.

Институт космических
исследований РАН
Москва

Поступило в Редакцию
9 января 1996 г.