

01;07;09

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, ПРОХОДЯЩЕЙ ОПТИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ, С УЧЕТОМ СФЕРИЧЕСКОЙ АБЕРРАЦИИ

© Э.А.Тропп, В.Б.Кантор, Л.Б.Прожкт

Изучено влияние сферической аберрации на распределение электромагнитного поля в фокальной области оптического прибора. Построена равномерная коротковолновая асимптотика решения уравнения Гельмгольца, моделирующего рассмотренную ситуацию. В случае прохождения света через длиннофокусную оптическую систему найденное решение является осесимметричным аналогом интеграла Перси, описывающего распределение электромагнитного поля в области носика каустики.

При постановке экспериментов по изучению оптического пробоя стекол [1] возникает необходимость в аналитическом описании электромагнитного поля вблизи фокальной области короткофокусной оптической системы. Любой реальный оптический прибор обладает сферической аберрацией, которая приводит к появлению в фокальной области *носика каустики* (рис. 1). Нас, прежде всего будет интересовать распределение электромагнитного поля в этой области. В качестве модели данной задачи рассмотрим задачу о распространении светового пучка с параболическим фронтом. На языке волновой оптики описать поле оптического прибора означает получить равномерную асимптотику решения

при $ka \rightarrow \infty$, где k — волновое число. Для построения равномерной асимптотики решения этой задачи мы воспользуемся методом канонического оператора [2].

Сначала найдем геометриоптическое приближение искомого решения. С этой целью рассмотрим задачу

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = U_0^{1/2} \theta \left[(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} - b \right], \quad (2)$$

где $\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$, а Γ — параболоид: $z = (\alpha^2 + \beta^2)/(2\alpha)$; $\alpha = x|_{\Gamma}$, $\beta = y|_{\Gamma}$, и будем искать ее решение в виде

$$u = \phi_0 \cdot \exp(ikS) + O((ka)^{-1}). \quad (3)$$

Для построения такого решения требуется решить уравнение эйконала

$$(\nabla S)^2 = 1 \quad (4)$$

и уравнение переноса

$$2\nabla\phi_0\nabla S + \phi_0\Delta S = 0. \quad (5)$$

Уравнение (3) будем решать с начальным условием

$$S|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

Задача Коши (4), (6) эквивалентна характеристической системе Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{p}_x = 0, & \dot{x} = p_x, \\ \dot{p}_y = 0, & \dot{y} = p_y, \\ \dot{p}_z = 0, & \dot{z} = p_z, \end{cases}$$

решение которой в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\begin{cases} p_{\varphi} = 0, & \varphi = \varphi_0, \\ p_z = a/\sqrt{a^2 + \delta^2}, & z = \frac{at}{\sqrt{a^2 + \delta^2}} + \frac{\delta^2}{2a}, \\ p_{\rho} = \delta/\sqrt{a^2 + \delta^2}, & \rho = \delta \left| 1 - \frac{t}{\sqrt{a^2 + \delta^2}} \right|, \\ S = \frac{1}{a} \left(z - \frac{\delta^2}{2a} \right) \sqrt{a^2 + \delta^2}, \end{cases}$$

где $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $p_{\rho} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

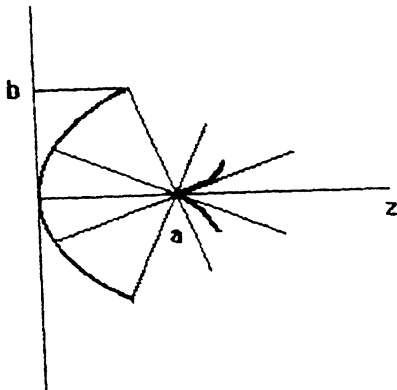


Рис. 1. Проекция характеристик на координатную плоскость.

Соотношения (7) определяют лагранжево многообразие, образованное характеристиками $\{x_i(t), p_i(t)\}$, проекция которых на координатное пространство образует геометрооптическое поле лучей. В (7) $\{\alpha, \beta, t\}$ образуют лучевую систему координат: α, β "нумеруют" лучи, а t отмечает точку на выбранном луче. Решение уравнения переноса (5) имеет вид

$$\phi_0 = \psi_0(\alpha, \beta) \frac{1}{\sqrt{J}}, \quad (8)$$

где ψ_0 — функция, определяемая только начальными условиями, а J — якобиан перехода от декартовых координат к лучевым: $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, t)}$. Вычисляя якобиан на основе соотношений (7) и используя переменные $\{p_\rho, p_\varphi, z\}$, получаем

$$J = \frac{a(2 + p_\rho^2) - 2z(1 - p_\rho^2)}{a\sqrt{1 - p_\rho^2}}. \quad (9)$$

Теперь выпишем геометрооптическое решение задачи (1), (2):

$$u = U_0^{1/2} \theta \left(\frac{ap_\rho}{[1 - p_\rho^2]^{1/2}} - b \right) \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a(2 + p_\rho^2) - 2z(1 - p_\rho^2)}} \times \\ \times \left\{ ik \left[z - \frac{ap_\rho^2}{2(1 - p_\rho^2)} \right] \frac{1}{(1 - p_\rho^2)^{1/2}} \right\}. \quad (10)$$

Переписав (9) в пространственных координатах и приравняв полученное выражение нулю, получим, что цикл особенностей многообразия (7), т. е. множество точек, неоднозначно проектирующихся на координатное пространство, является полукубическим параболоидом (рис. 1):

$$\rho^2 = \frac{8}{27} \frac{(z-a)^3}{a}. \quad (11)$$

Ключевым моментом метода канонического оператора является тот факт, что переход из одной плоскости фазового пространства, определяемого (7), в другую осуществляется интегральным преобразованием Фурье [2]. Найдем плоскость фазового пространства, на которую многообразие (7) проектируется в области каустики (11) диффеоморфно. Существование такой плоскости гарантируется лагранжевыми многообразиями (7). Такая плоскость задается координатами (p_x, p_y, z) . Действительно,

$$\bar{J} = \frac{\partial(p_x, p_y, z)}{\partial(\alpha, \beta, t)} = \frac{a^4}{(a^2 + \delta^2)^2} \neq 0. \quad (12)$$

Осуществим Фурье-преобразование в уравнении (1) от координат $\{x, y, z\}$ к координатам $\{q_x, q_y, z\}$. Тогда получим:

$$-k^2 q_\rho^2 \tilde{u} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + k^2 \tilde{u} = 0, \quad (13)$$

где $q_\rho = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$. Нетрудно убедиться [2] в том, что решение уравнения (13) \tilde{u} является Фурье-образом решения уравнения (1) и регулярно при любых значениях своих переменных:

$$\tilde{u}(q_\rho, z) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} u(\rho, z) \exp\{-ik(\mathbf{q}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho})\} \rho d\rho d\varphi. \quad (14a)$$

Причем коротковолновое приближение решения уравнения (13) \tilde{u} вновь представимо в виде $\tilde{u} = \phi \exp(ik\tilde{S})$. В силу вышесказанного равномерная асимптотика решения задачи (1), (2) запишется в виде обратного Фурье-преобразования коротковолновой асимптотики решения уравнения (13):

$$u(\rho, z) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \tilde{u}(q_\rho, z) \exp\{-ik(\mathbf{q}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho})\} q_\rho dq_\rho d\varphi. \quad (14b)$$

Для нахождения коротковолновой асимптотики \bar{u} оценим интеграл, входящий в правую часть (14а), воспользовавшись методом стационарной фазы [3]. Стационарная точка

$$\text{определяется уравнением } d(S - \mathbf{q}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho}) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \rho} = q_\rho, \\ \sin \varphi = 0, \end{cases}$$

где φ — угол между \mathbf{q}_ρ и $k\rho$. Решение последней системы совпадает с (7), поэтому в дальнейшем вместо переменных q_x, q_y будем использовать переменные p_x, p_y , которые будем называть x - и y -компонентами импульса \mathbf{p} . В результате получим следующие соотношения между $\{\bar{S}, \bar{\phi}\}$ и $\{S, \phi\}$:

$$\bar{S} = (S - p_\rho \rho \cos \varphi)|_{d(S - p_\rho \rho) = 0} = z \sqrt{1 - p_\rho^2} - \frac{ap_\rho^2}{2(1 - p_\rho^2)^{1/2}}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \frac{\phi p_\rho^2}{\sqrt{|\text{Hess}(S - \mathbf{p}_\rho \boldsymbol{\rho})|}} \Big|_{d(S - p_\rho \rho) = 0} = \\ &= U_0^{1/2} \frac{[2z(1 - p_\rho^2) - a(1 + p_\rho^2)]^{1/2}}{\sqrt{2}(1 - p_\rho^2)^{5/4}} \theta \left\{ \frac{ap_\rho}{\sqrt{1 - p_\rho^2}} - b \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

здесь $\text{Hess}(w)$ — гессиан:

$$\begin{aligned} \text{Hess}(w) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix} \Big|_{d(S - p_x x - p_y y) = 0} = \\ &= \frac{2(1 - p_x^2 - p_y^2)^3}{2z(1 - p_x^2 - p_y^2) - a(2 + p_x^2 + p_y^2)}. \quad (17) \end{aligned}$$

Подставив в (14б) соотношения (15) и (16), определяющие коротковолновую асимптотику решения уравнения (13), получим равномерную коротковолновую асимптотику решения уравнения Гельмгольца для волны с параболическим фронтом:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{\sqrt{\frac{2z}{a+2z}}} U_0^{1/2} \frac{\exp \left\{ ik \left[z \sqrt{1 - p_\rho^2} - \frac{a}{2} \frac{p_\rho^2}{(1 - p_\rho^2)^{1/2}} \right] \right\}}{(1 - p_\rho^2)^{5/4}} \theta \times \\ &\times \left\{ \frac{ap_\rho}{\sqrt{1 - p_\rho^2}} - b \right\} J_0(kp_\rho \rho) p_\rho dp_\rho, \quad (18) \end{aligned}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

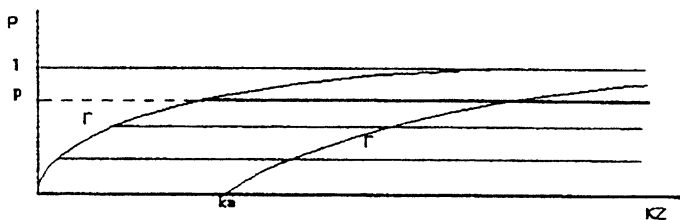


Рис. 2. Проекция характеристик на плоскость $\{p_\rho, kz\}$. Γ_1 — проекция начального фронта на $\{p_\rho, kz\}$ -плоскость: $\Gamma_1: p_\rho = \sqrt{\frac{2z}{a+2z}}$, \bar{p}_ρ — импульс крайнего луча: $\bar{p}_\rho = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; Γ_2 — проекция каустики на $\{p_\rho, kz\}$ -плоскость.

В интеграле (18) границы интегрирования определяются проекцией начального фронта на плоскость $\{p_\rho, kz\}$ (рис. 2).

Отметим, что в области $z > \frac{b^2}{2a}$ решение (18) совпадает с решением, предложенным Р.К. Люнебургом [4]:

$$u = \int_0^{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} U_0^{1/2} \varphi(p_\rho) \exp \times \\ \times \left\{ ik \left[z \sqrt{1-p_\rho^2} - \psi(p_\rho) \right] \right\} J_0(kp_\rho \rho) p_\rho dp_\rho, \quad (19)$$

где $\psi(p_\rho)$ — характеристическая функция Гамильтона, определяемая формой фронта, а $\varphi(p_\rho)$ — предэкспоненциальная функция, близкая, по предположению Р.К. Люнебурга, к единице. Таким образом, становится ясным, что добавка в показателе экспоненты, характерная для параболического фронта, $\frac{p_\rho^2}{\sqrt{1-p_\rho^2}}$ является классической гамильтоновой характеристической функцией.

Кроме того, использование метода канонического оператора позволило определить предэкспоненциальный множитель в подынтегральном выражении. Причем его вклад возрастает при росте апертуры, как и в безаберрационном случае [5]. Однако вблизи носика каустики, а именно эта область представляет практический интерес, этот множитель близок к единице. Чтобы убедиться в этом, исследуем выражение (18) в этой области. Будем считать, что $b < \sqrt{2a}$.

Тогда в области $z > b^2/2a$ равенство (18) примет вид

$$u = \int_0^{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} U_0^{1/2} \frac{\exp \left\{ ik \left[z \sqrt{1-p_\rho^2} - \frac{a}{2} \frac{p_\rho^2}{(1-p_\rho^2)^{1/2}} \right] \right\}}{J_0(k\rho_\rho)} p_\rho dp_\rho. \quad (20)$$

Нетрудно убедиться в том, что решение (20) при $b/\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow 0$ приводится к следующему виду:

$$u = U_0^{1/2} \exp(ik(z+a)) \int_0^\gamma \exp \left\{ -i/2(\lambda^2\tau + \lambda^4) \right\} J_0(\lambda\chi) \lambda d\lambda \times \\ \times \left[1 + O \left(\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^4 \right) \right], \quad (21)$$

где $\chi = k\rho/\sqrt{ka}$, $\tau = k(z-a)/\sqrt{ka}$, $\gamma = \frac{b^4\sqrt{ka}}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Если параметр γ стремится к бесконечности, то интеграл (21) становится осесимметричным аналогом хорошо известного интеграла Перси [4]

$$u = U_0^{1/2} \exp(ik(z+a)) \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\lambda^2x + \lambda^4 - 2\lambda x) \right\} d\lambda. \quad (22)$$

Список литературы

- [1] Ефимов О.М., Глебов Л.Б. // Изв. АН СССР. Сер. Физ. 1985. Т. 49. № 6. С. 1140–1145.
- [2] Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
- [3] Гейлемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. М.: Мир, 1981.
- [4] Luneburg R.K. Berkley: Univ. of California Press, 1964.
- [5] Тропп Э.А., Кантор В.Б., Прохот Л.Б. // Письма в ЖТФ. Т. 21. В. 7. С. 50–55.

Физико-технический
институт им. А.Ф. Иоффе
РАН
С.-Петербург

Поступило в Редакцию
6 марта 1996 г.