

01;03

О СНИЖЕНИИ КРИТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИЛЬНО ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ЗА СЧЕТ РЕЛАКСАЦИИ ЗАРЯДА

© С.О.Ширяева, А.И.Григорьев, В.А.Коромыслов

Исследование устойчивости заряженных капель по отношению к собственному и индуцированному зарядам представляет интерес в связи с многочисленными геофизическими, техническими и технологическими приложениями, в которых фигурирует подобный объект. Эта проблема неоднократно анализировалась и экспериментально, и теоретически (см., например, [1] и указанную там литературу). Тем не менее некоторые вопросы, связанные с такой задачей, остались не выясненными. Так, до сих пор не проведено исследование влияния конечности скорости перераспределения заряда при деформации капли на закономерности ее капиллярных колебаний и устойчивости по отношению к собственному заряду.

Пусть дана сферическая капля радиусом R вязкой несжимаемой жидкости плотностью ρ , с коэффициентом кинематической вязкости ν , удельной проводимостью σ , диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , с коэффициентом поверхностного натяжения α , совершающая капиллярные колебания бесконечно малой амплитуды, возникающие вследствие теплового движения молекул. Пусть капля обладает зарядом Q и помещена в окружающую среду с характеристиками: $\sigma = 0$, $\epsilon_2 = 1$. Уравнение свободной поверхности капли в сферической системе координат с началом в центре капли запишется в виде $r = R + \xi(\theta, \varphi, t)$, где ξ — возмущение равновесной сферической поверхности капли, вызванное капиллярным волновым движением, $|\xi| \ll R$.

Для упрощения записи и последующих вычислений введем безразмерные переменные, в которых $R = 1$, $\rho = 1$, $\alpha = 1$. Тогда остальные величины (за которыми оставим прежние обозначения) выразятся в единицах своих характерных значений:

$$r_* = R; t_* = R^{3/2} \rho^{1/2} \alpha^{-1/2}; u_* = R^{-1/2} \rho^{-1/2} \alpha^{1/2}; P_* = R^{-1} \alpha;$$

$$\sigma_* = R^{-3/2} \rho^{-1/2} \alpha^{1/2}; Q_* = R^{3/2} \alpha^{1/2}; \nu_* = R^{1/2} \rho^{-1/2} \alpha^{1/2}.$$

Система уравнений гидродинамики в электростатическом поле \mathbf{E} с потенциалом Φ , создаваемым зарядом Q , име-

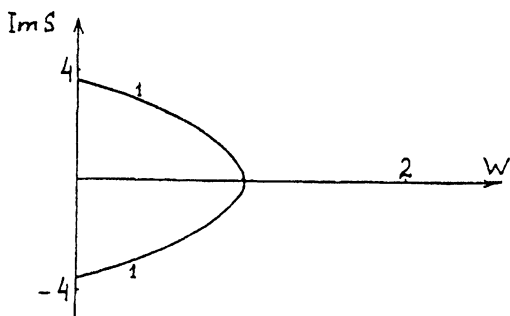
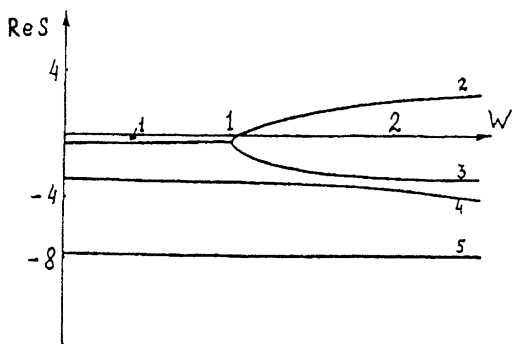


Рис. 1. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты S капиллярных движений жидкости в сферической капле, связанных с основной модой, от величины безразмерного заряда W , рассчитанные: при $\nu = 0.1$; $\sigma = 0$; $\varepsilon = 100$.

ет вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla P_1 + \nu \Delta \mathbf{u}; \quad \text{div} \mathbf{u} = 0; \quad (1)$$

$$\text{div} \mathbf{D}_1 = 4\pi\mu; \quad \text{div} \mathbf{D}_2 = 0; \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi; \quad (2)$$

индекс 1 относится к жидкости, а индекс 2 — к внешней среде; ε_i — диэлектрическая проницаемость (ниже принимается, что $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$); Φ ; — электрический потенциал; $\mu(\mathbf{r}, t)$ — объемная плотность заряда; $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей; $P_1(\mathbf{r}, t)$ — давление внутри жидкости при наличии внешнего электрического поля.

На свободной поверхности капли, описываемой теперь уравнением

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 - \xi(\theta, \varphi, t) = 0, \quad (3)$$

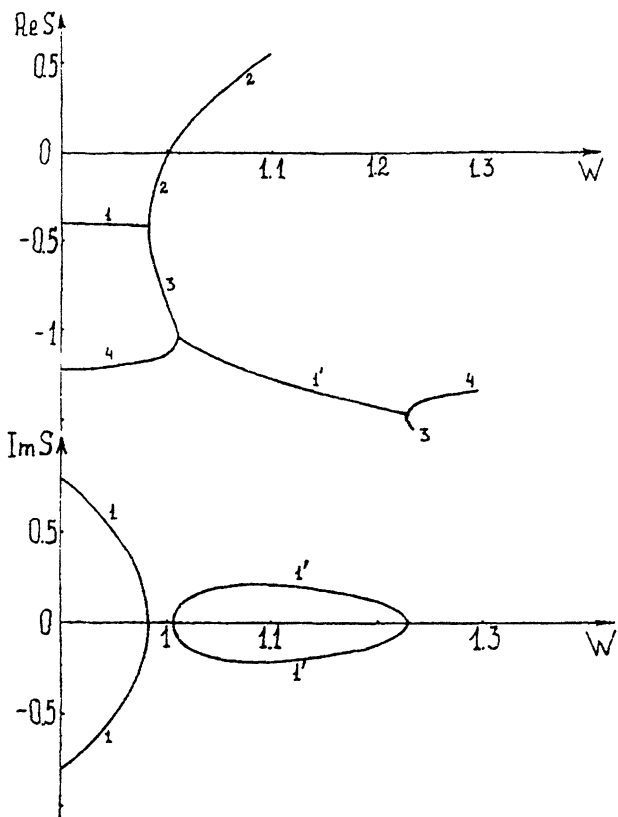


Рис. 2. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты S капиллярных движений жидкости в сферической капле, связанных с основной модой, от величины безразмерного заряда W , рассчитанные при $\nu = 0.1$; $\sigma = 10$; $\epsilon = 100$.

должны выполняться следующие граничные условия:
кинематическое

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0; \quad (4)$$

динамическое для касательных компонент тензора напряжений

$$(\pi_{2\tau} - \pi_{1\tau}) - \nu \cdot [\tau \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot (\tau \cdot \nabla) \mathbf{u}] = 0, \quad (5)$$

$\Pi_{\tau} = \frac{\epsilon}{4\pi} E_n E_{\tau}$; E_n , E_{τ} — нормальная и касательная компоненты напряженности электрического поля; \mathbf{n} и τ — векторы нормали и касательной к поверхности (3);

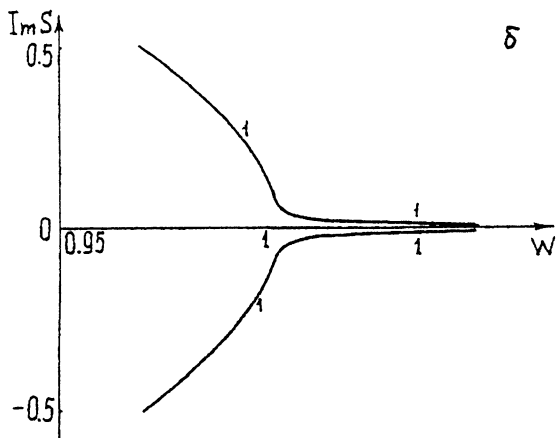
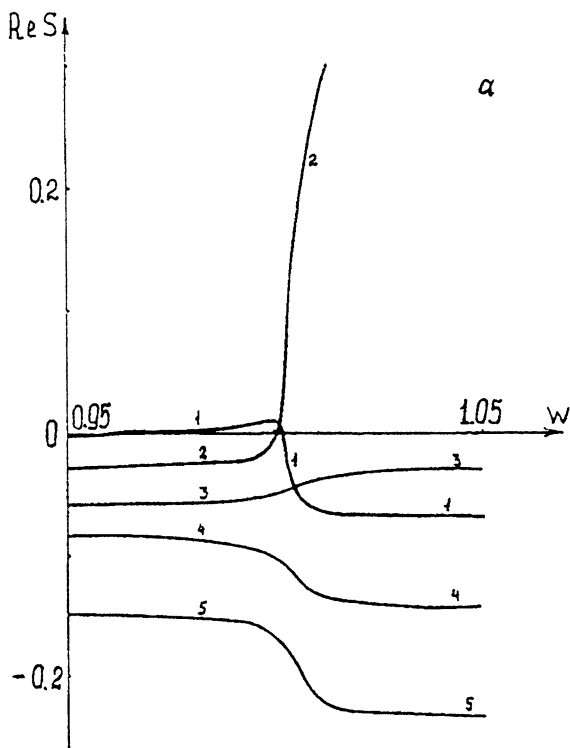


Рис. 3. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты S капиллярных движений жидкости в сферической капле, связанных с основной модой, от величины безразмерного заряда W , рассчитанные: при $\nu = 0.001$; $\sigma = 0.5$; $\epsilon = 100$.

динамическое для нормальной компоненты тензора напряжений

$$-(P_1 - P_2) + 2\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} - P_E + P_\alpha = 0, \quad (6)$$

P_2 — давление внешней среды; P_E и P_α — давления электрических сил и сил поверхностного натяжения;

$$r = 1 + \xi: \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi \kappa; \quad \Phi_1 = \Phi_2; \quad (7)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_2 \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \Phi_1 \rightarrow \text{const};$$

$\kappa(\theta, \varphi, t)$ — поверхностная плотность электрического заряда.

Система уравнений (1), (2) с условиями (4)–(7) представляет собой математическую формулировку анализируемой задачи. Решение задачи методом скаляризации, подробно изложенным в [2], показывает, что в капле реализуются движения жидкости двух типов: аperiodически затухающие вихревые тороидальные, характеризующиеся дисперсионным уравнением

$$\sqrt{\frac{S}{\nu}} i_{k+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + (k-1) \cdot i_k \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) = 0, \quad (8)$$

и гармонически-полоидальные движения с дисперсионным уравнением

$$S \cdot \left\{ S^2 + 2(k-1)(2k+1)\nu S + k(k-1)(k+2) \left[1 - \frac{4}{k+2} W \right] \right\} -$$

$$- 2\sqrt{\frac{S}{\nu}} f_k \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \nu \left\{ S^2 + 2k(k-1)(k+2)\nu S + \right.$$

$$\left. + k(k-1)(k+2) \left[1 - \frac{4}{(k+2)} W \left(1 + (k+1) D_k(\sigma, \varepsilon, S) \right) \right] \right\} = 0; \quad (9)$$

$$f_k \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \equiv \frac{i_{k+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right)}{i_k \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right)};$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{16\pi}; \quad D_k(\sigma, \varepsilon, S) \equiv \frac{(k-1)S}{[k(4\pi\sigma + S\varepsilon) + (k+1)S]},$$

$i_k(x)$ — сферические цилиндрические функции первого рода.

Влияние релаксации электрического заряда учитывается выражением $D_k(\sigma, \varepsilon, S)$, которое при $\sigma \rightarrow \infty$ обращается в ноль. При этом перераспределение заряда по поверхности капли при ее деформации происходит мгновенно и эффекта релаксации не наблюдается. На вихревые тороидальные движения жидкости в капле эффект релаксации заряда влияния в использованном линейном по ξ и u приближении не оказывает.

Результаты численных расчетов по (9) представлены на рис. 1–3. На рис. 1 представлен общий вид ветвей дисперсионного уравнения (9) в отсутствие эффекта релаксации заряда, т. е. при бесконечно большой скорости выравнивания потенциала. Кривые 1–3 описывают капиллярные гармонически-полоидальные движения жидкости; кривые с номерами, большими 3, описывают аperiodически затухающие чисто полоидальные движения. Вещественная часть кривой 2 в области $\text{Re}S > 0$ характеризует инкремент неустойчивости капли по отношению к собственному заряду (неустойчивость Рэлея). При уменьшении проводимости жидкости начинает сказываться конечность скорости перераспределения заряда при деформациях свободной поверхности жидкости. В частности, ветвь 3 гармонически-полоидальных движений жидкости пресекается с ветвью чисто полоидальных движений 4 и порождает волновые зарядово-релаксационные движения жидкости (ветвь 1'), как это видно из рис. 2. Дальнейшее уменьшение проводимости приводит к более существенной деформации ветвей дисперсионного уравнения (рис. 3). Волновые движения обоих типов: гармонически-полоидальные и зарядово-релаксационные — объединяются в одно волновое движение. При этом часть вещественной компоненты объединенного решения становится положительной, что соответствует возникновению колебательной неустойчивости, отличной от неустойчивости Рэлея. Инкремент возникшей колебательной неустойчивости много меньше инкремента неустойчивости Рэлея (рис. 3), но возникает она при меньших значениях заряда капли (параметра W): при принятых значениях вязкости ν и проводимости σ , при $W_{\text{кр}} \approx 0.96$, тогда как аperiodическая неустойчивость Рэлея независимо от величины вязкости реализуется при $W_{\text{кр}} = 1$.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. № 3. С. 19–28.
- [2] Ширяева С.О., Григорьев А.И. и др. Препринт ИМ РАН № 30. Ярославль, 1995. 50 с.

Поступило в Редакцию
14 марта 1996 г.