Письма в ЖТФ, том 22, вып. 9 12 мая 1996 г.

05.4

СТАЦИОНАРНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ЗОНА В ОГРАНИЧЕННОМ ОДНОМЕРНОМ СВЕРХПРОВОДНИКЕ

© *А.С.Рудый*

Одной из проблем, возникающих при эксплуатации сверхпроводящих материалов и приборов на их основе, является тепловое разрушение серхпроводимости. При достаточно сильном внешнем тепловом воздействии на сверхпроводник с током в сверхпроводнике образуется резистивный домен или область нормальной фазы (зоны). Задачи о динамике резистивного домена и нормальной зоны рассматривались задолго до открытия высокотемпературной сверхпроводимости в связи с тепловым разрушением сверхпроводящего состояния в обмотках сильноточных магнитов [1]. С появлением высокотемпературных сверхпроводников возникла необходимость в исследовании условий образования и устойчивости нормальной зоны в слаботочных сверхпроводящих структурах. В настоящей работе эта задача решается применительно к одномерным и планарным структурам как наиболее распространенным элементам криоэлектроники.

1. Рассмотрим изображенную на рис. 1 сверхпроводящую пленку с переменным током, центральная часть которой находится в нормальном состоянии. Пусть пленка помещена в среду теплообменной жидкости или газа, а вся система, за исключением пленки, имеет температуру ниже критической T_c и находится в состоянии теплового равновесия. Исследуем случай, когда неоднородное температурное поле пленки одномерно. Введем следующие обозначения для отклонения температуры сверхпроводящей пленки от ее равновесного значения: $T_s(x,t)$ — отклонение температуры в сверхпроводящей области, $T_n(x,t)$ — в области нормальной фазы. Учитывая симметрию системы, запишем краевую задачу для определения температурного поля сверхпроводящей S и нормальной N фазы:

$$c\nu_s\dot{T}_s = \lambda_s T_s'' - 2\frac{\alpha}{h}T_s,$$

$$c\nu_n\dot{T}_n = \lambda_n T_n'' + \rho_0(1+\beta T_n)\bar{j}^2 - 2\frac{\alpha}{h}T_n;$$

$$T_s(0,t) = 0; \quad T_n'(x,t)\Big|_{x=\delta} = 0, \tag{1}$$

$$T_s(x_b,t)=T_n(x_b,t)=T_c;\ \lambda_s T_s'(x,t)\Big|_{x=x_b(t)}=\lambda_n T_n'(x,t)\Big|_{x=x_b(t)}.$$

Здесь c_{Vs}, c_{Vn}, λ_s, λ_n — объемные теплоемкости и теплопроводности сверхпроводящей и нормальной фаз соответственно, ρ_0 — сопротивление нормальной фазы, β — температурный коэффициент сопротивления, $\bar{j}^2$ — среднее за период значение квадрата плотности тока, α — коэффициент теплоотдачи, h — толщина сверхпроводника, x_b — координата фазовой границы. Последние слагаемые в правых частях уравнений (1) учитывают тепловые потери за счет конвективного теплообмена на поверхности. При этом, ввиду малости h, стандартным образом предполагается, что тепловое сопротивление и температурный градиент в направлении нормали к поверхности отсутствуют.

Выделим в общем решении задачи (1) $T(x,t)=\bar{T}(x)+$ $+\dot{T}(x,t)$ стационарную часть $\bar{T}(x)$ и сформулируем краевую задачу по ее определению, которую запишем в безразмерном виде

$$\begin{gathered}\bar{T}_s''-2Bi_s\bar{T}_s=0,\\ \bar{T}_n''-k\bar{T}_n+K=0, \qquad (2)\\ \bar{T}_s(0)=0;\qquad \bar{T}_n'\Big|_{\xi=1}=0,\\ \bar{T}_s(\bar{\xi}_b)=\bar{T}_n(\bar{\xi}_b)=T_c;\quad \lambda_s\bar{T}_s'\Big|_{\xi=\bar{\xi}_b}=\lambda_n T_n'\Big|_{\xi=\bar{\xi}_b},\end{gathered}$$

где $\xi=x/\delta$ — нормированная координата, $Bi=\alpha\delta^2/h\lambda$ — критерий Био[1], а $k=2Bi_n-\beta\rho_0\bar{j}^2\delta^2/\lambda_n$ и $K=\rho_0\bar{j}^2\delta^2/\lambda_n$ — вспомогательные параметры.

Решения задачи (2) зависят от знака параметра k и при положительном значении последнего имеют вид

$$\bar{T}_s(\xi)=\frac{T_c}{\operatorname{sh}\sqrt{2Bi_s}\bar{\xi}_b}\operatorname{sh}\sqrt{2Bi_s}\xi,$$

$$\bar{T}_n(\xi)=T_c\left[\frac{K}{kT_c}-\frac{\lambda_s}{\lambda_n}\sqrt{\frac{2Bi_s}{k}}\frac{\operatorname{cth}\sqrt{2Bi_s}\bar{\xi}_b}{\operatorname{sh}\sqrt{k}(1-\bar{\xi}_b)}\operatorname{ch}\sqrt{k}(1-\xi)\right]. \qquad (3)$$

Остановимся подробнее на новом комплексе параметров K/kT_c, появляющемся в решении (3).

[1] Обычно критерием Био называют безразмерный комплекс $\alpha\delta/\lambda$, являющийся мерой отношения внутреннего δ/λ и внешнего $1/\alpha$ тепловых сопротивлений. В данном случае Bi — произведение собственно критерия Био на критерий подобия параметрического вида δ/h.

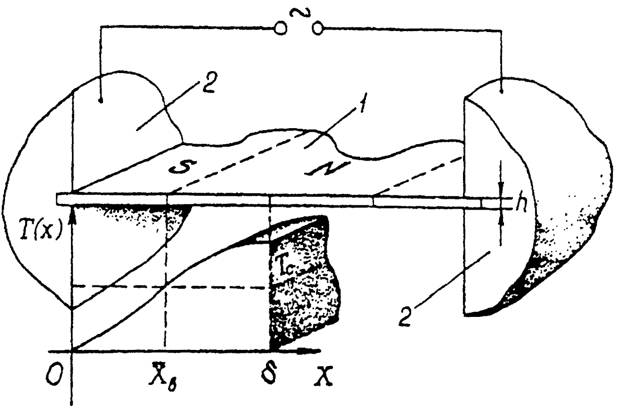


Рис. 1. Сверхпроводящая пленка *1* в цепи источника переменного тока ($\bar{j}^2 = \mathrm{const}$). Температура на концах пленки поддерживается ниже критической термостатом *2*, а на свободной поверхности происходит конвективный теплообмен. Показано отклонение температуры пленки в двухфазном состоянии от температуры термостата.

2. Мерой отношения характерной мощности тепловыделения $\bar{j}^2\rho_0 dV$ к теплоотводу $\alpha(T_c - T_0)dS$ в сверхпроводниках с транспортным током служит безразмерный параметр Стекли σ_0. В частности, для тонких пленок $\sigma_0 = \bar{j}^2\rho_0 h/2\alpha(T_c - - T_0)$. Можно показать, что в рассматриваемом случае для классических сверхпроводников выполняется соотношение $K/kT_c = \sigma_0$. Действительно, для типичных значений параметров $\alpha = 250$ Вт/м$^2\cdot$К (охлаждение жидким He), $\delta = 10^{-3}$ м, $h = 5\cdot10^{-7}$ м, $\lambda = 500$ Вт/м$\cdot$К, $\rho_0 = 3\cdot10^{-10}$ Ом$\cdot$м, $\beta \leqslant 10^{-6}$ К$^{-1}$ имеем $k = 2\text{–}6\cdot10^{-25}\bar{j}^2$. Очевидно, что плотность тока, при которой второе слагаемое в k сопоставимо с первым, намного превосходит его критическое значение $\sim 10^9$ А$\cdot$м$^{-2}$, поэтому вторым слагаемым в k можно пренебречь. Полагая $k = 2Bi_n$ и учитывая, что $T_0 = 0$, получим $K/kT_c = \bar{j}^2\rho_0 h/2\alpha T_c = \sigma_0$.

Электрофизические параметры новых сверхпроводников существенно зависят от гомогенности, кислородной стехиометрии и степени упорядоченности кислородной подсистемы [2]. Так, у монокристаллов $YBa_2Cu_3O_{6+x}$ в направлении кристаллографической оси c эти параметры достигают значений $\rho_0 = 10^{-5}$ Ом$\cdot$м, $\beta = -2\cdot10^{-2}$ К$^{-1}$ [3], в то время как λ_n оказывается на порядок ниже, чем у классических сверхпроводников [4]. При тех же значениях $Bi \approx 1$, поскольку при охлаждении парами азота величина α также снижается на порядок, второе слагаемое в k дает вклад, сопоставимый с перым уже при $\bar{j}^2 \sim 10^{14}\ \mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{м}^{-4}$. Таким образом, для высокотемпературных сверхпроводников безразмерный комплекс $\sigma \equiv K/kT_c$ играет ту же роль, что и параметр Стекли для классических сверхпроводников, с которым он связан соотношением $\sigma = \sigma_0/(1 - \beta T_c \sigma_0)$.

3. Возвращаясь к решениям задачи (2) и полагая в (3) $\bar{T}_n(\bar{\xi}_b) = T_c$, определим координату фазовой границы. Переходя к введенным выше обозначениям, в частности, сделав замену $k = 2Bi_n\sigma_0/\sigma$, получим уравнение для вычисления $\bar{\xi}_b$

$$\mathrm{cth}\sqrt{2Bi_n\frac{\sigma_0}{\sigma}}(1-\bar{\xi}_b)\mathrm{cth}\sqrt{2Bi_s}\bar{\xi}_b = (\sigma - 1)\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_s}}. \qquad (4)$$

Рассмотрим двухфазное состояние классического сверхпроводника. При $\sigma = \sigma_0$ левая часть уравнения (4), согласно представленному на рис. 2 графику, является глобальной вогнутой функцией $\bar{\xi}_b$, в то время как правая часть от $\bar{\xi}_b$ не зависит. Фунция от $\bar{\xi}_b$ достигает минимального значения в точке $\bar{\xi}_b^{\min}$, определяемой условием

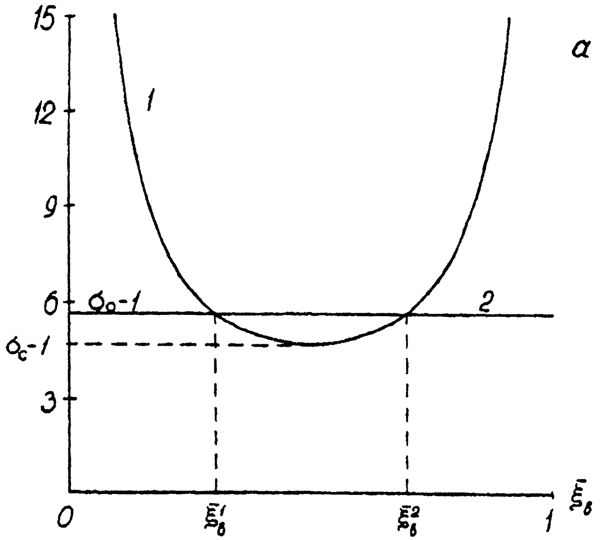
$$\sqrt{Bi_n}\mathrm{sh}2\sqrt{2Bi_s}\bar{\xi}_b = \sqrt{Bi_s}\mathrm{sh}2\sqrt{2Bi_n}(1-\bar{\xi}_b). \qquad (5)$$

Система уравнений (4), (5), последовательно разрешенная относительно неизвестных $\bar{\xi}_b$ и σ_0, определяет критическое значение параметра Стекли σ_c, выше которого сверхпроводящее состояние метастабильно. При достаточно сильном возмущении система перейдет в устойчивое двухфазное состояние (3), где последнее выражение с учетом (4) можно заменить на

$$\bar{T}_n(\xi) = T_c\sigma_0\left[1 + \frac{1-\sigma_0}{\sigma_0}\frac{\mathrm{ch}\sqrt{2Bi_n}(1-\xi)}{\mathrm{ch}\sqrt{2Bi_n}(1-\bar{\xi}_b^m)}\right], \quad m = 1, 2. \qquad (6)$$

Индекс m при координате фазовой границы показывает, что при $\sigma > \sigma_c$ имеется два состояния равновесия (рис. 2). Анализ устойчивости этих состояний по первому приближению приводит к громоздким выражениям, исследование которых представляет отдельную задачу. Тем не менее из асимптотики этих выражений следует, что, по крайней мере, при $\bar{\xi}_b = \bar{\xi}_b^{\min} \pm \varepsilon$ оба состояния равновесия локально устойчивы, т. е. рассматриваемая система бистабильна.

Электро- и теплофизические параметры новых сверхпроводников таковы (например, в базовой плоскости монокристаллического $YBa_2Cu_3O_{6+x}$ $\rho_0 = 4 \cdot 10^{-7}$–$1.5 \cdot 10^{-6}$ Ом · м, $\beta \sim 2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{K}^{-1}$, $\lambda_n = 25$ Вт/м · К), что параметр k может



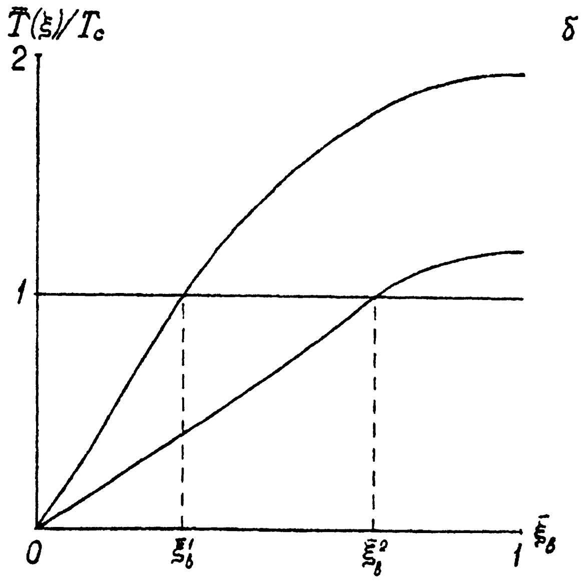


Рис. 2. *а* — графики левой *1* и правой *2* частей уравнения (4) для случая $\lambda_n = \lambda_s$; $Bi_n = Bi_s = 1/2$; *б* — температурное поле двухфазных состояний, соответствующих показанным на рис. 2, *а* положениям фазовой границы.

принимать отрицательные значения при сравнительно небольшой плотности тока. Если $k < 0$, то решение задачи (2) для нормальной фазы преобразуется в

$$\bar{T}_n(\xi) = T_c|\sigma| \left[\frac{1 + |\sigma| \operatorname{ch}\sqrt{|k|}(1-\xi)}{|\sigma| \operatorname{ch}\sqrt{|k|}(1-\bar{\xi}_b^m)} - 1 \right], \tag{7}$$

а $\bar{\xi}_b$ определяется как корень уравнения

$$\sqrt{\frac{|\sigma|}{\sigma_0}} \operatorname{ctg}\left[\sqrt{2Bi_n \frac{\sigma_0}{|\sigma|}}(1-\bar{\xi}_b)\right] \operatorname{cth}\sqrt{Bi_s}\bar{\xi}_b = (1+\sigma)\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_s}}. \tag{8}$$

Существенно, что левая часть уравнения (8) содержит периодическую функцию $\bar{\xi}_b$ и при больших значениях Bi в системе возможно более двух состояний равновесия.

В заключение рассмотрим случай, когда при увеличении $T_n(\xi)$ рост тепловых потерь за счет конвекции почти полностью компенсируется увеличением тепловыделения, т. е. $k = \pm\varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$. Асимптотика выражений (4), (8) при условии $1|\sigma| \leqslant \varepsilon$ имеет вид

$$\frac{\operatorname{cth}\sqrt{Bi_s}\bar{\xi}_b}{\sqrt{2Bi_n}(1-\bar{\xi}_b)} = \sigma_0 \left(1 \mp \frac{1}{|\sigma|}\right)\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_s}}. \tag{9}$$

Полученные результаты легко обобщаются на случай одномерного сверхпроводника, например тонкой нити радиуса r, заменой h на r.

4. Таким образом, при значениях параметра $\sigma > \sigma_c$ сверхпроводящее состояние в одномерных и планарных слаботочных сверхпроводящих структурах метастабильно. При тепловом возмущении система переходит в одно из двухфазных состояний, локально устойчивых в некотором диапазоне изменения σ, играющего роль управляющего параметра. Это свойство рассматриваемой системы может найти применение в пороговых тепловых детекторах и приемниках инфракрасного излучения. Кроме того, полученные результаты позволяют сформулировать задачу о динамике нормальной зоны, в частности о периодических решениях задачи (1). Динамика бистабильной системы с учетом периодических движений может оказаться весьма богатой и перспективной с точки зрения ее практического применения в указанных выше областях.

Список литературы

[1] *Гуревич А.Вл., Минц Р.Г., Рахманов А.Л.* // Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.

[2] *Высокотемпературная* сверхпроводимость. Фундаментальные и прикладные исследования / Под ред. А.А. Киселева. Л.: Машиностроение, 1990. В. 1. 686 с.

[3] *Макаренко И.Н., Никифоров Д.В., Быков А.Б.* и др. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47. В. 1. С. 52–56.

[4] *Uher C.* // J. Superconduct. 1990. V. 3. N 4. P. 337–389.

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 19 октября 1996 г.