

01;03

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА СФЕРИЧЕСКОМ ЯДРЕ

© *А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, В.А. Коромыслов,
М.И. Муничев*

Электродиспергирование жидкости с поверхности тающих градин в грозовом облаке играет важную роль в процессах микроразделения зарядов и зарождения разряда линейной молнии [1]. Явление электродиспергирования вязкой жидкости с поверхности ее заряженного слоя, лежащего на твердой подложке, встречается в жидкостной масс-спектрометрии [2] и в жидкометаллических источниках ионов [3]. Тем не менее особенности реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости при одновременном влиянии вязкого затухания в объеме и на твердом дне остаются пока мало исследованными.

1. Пусть твердое сферическое ядро радиусом R_0 покрыто слоем идеально проводящей несжимаемой вязкой жидкости с внешним радиусом R и зарядом Q . Примем, что коэффициент кинематической вязкости жидкости есть ν , ее плотность ρ , коэффициент поверхностного натяжения σ . Поля давлений и скоростей капиллярного волнового движения в жидкости $P(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и искажение свободной поверхности жидкости $\xi(\mathbf{r}, t)$, возникающее из-за волнового движения, будем считать малыми. Кроме того, будем считать, что система обладает осевой симметрией.

Уравнение свободной поверхности жидкости в описанных условиях можно записать в виде

$$r = R + \xi(\theta, t); \quad |\xi| \ll R.$$

Нижеследующее рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$. Тогда все остальные величины, за которыми оставим прежние обозначения, будут выражены в единицах своих характерных значений

$$r_* = R; \quad t_* = R^{3/2} \rho^{1/2} \sigma^{-1/2}; \quad U_* = R^{-1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2};$$

$$P_* = R^{-1} \sigma; \quad Q_* = R^{3/2} \sigma^{1/2}; \quad \nu_* = R^{1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}.$$

Линеаризованная система уравнений гидродинамики, описывающая капиллярные движения в данной системе, будет иметь вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{in} + \nu \cdot \Delta \mathbf{U}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

$$r = R_0: \quad U_r = 0, \quad U_\theta = 0, \quad U_\varphi = 0; \quad (3)$$

$$r = 1: \quad \frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla F = 0, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0, \quad (5)$$

$$-(P^{in} - P^{ex}) + 2\rho\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + P_\sigma - P_E = 0. \quad (6)$$

В этих выражениях $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} — единичные векторы касательных и нормали к сферической поверхности; P^{ex} — давление внешней среды на поверхность жидкого слоя; P^{in} — давление внутри жидкости; P_σ — лапласовское давление:

$$P_\sigma = 2 - (2 + \Delta_\Omega) \xi(\theta, t);$$

Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах. Давление электрического поля на поверхность сферического слоя заряженной идеально проводящей жидкости P_E определится выражением [4]:

$$P_E = \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{1}{2\pi} Q^2 \xi + \frac{1}{4\pi} Q^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_n(\mu) \int_{-1}^1 \xi P_n(\mu) d\mu,$$

$P_n(\mu)$ — нормированные на единицу полиномы Лежандра, $\mu \equiv \cos \theta$.

2. Решение задачи (1)–(6) методом скаляризации, подробно изложенным в [5], позволяет найти дисперсионное уравнение для капиллярно-полоидальных движений жидкости в рассматриваемой системе в виде:

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = 0; \quad (7)$$

$$A_{11} = n; \quad A_{12} = -(n+1); \quad A_{13} = n(n+1)i_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right);$$

$$A_{14} = n(n+1)k_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right);$$

$$A_{15} = -S; \quad A_{21} = 2(n-1); \quad A_{22} = -2(n+2);$$

$$A_{23} = -2\sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{n+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + \left[\frac{S}{\nu} + 2(n+1)(n-1) \right] i_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right);$$

$$A_{24} = 2\sqrt{\frac{S}{\nu}}k_{n+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + \left[\frac{S}{\nu} + 2(n+1)(n-1) \right] k_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right);$$

$$A_{25} = 0;$$

$$A_{31} = S + 2\nu n(n-1); \quad A_{32} = S + 2\nu(n+1)(n+2);$$

$$A_{33} = 2\nu n(n+1) \left[\sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{n+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + (n-1)i_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \right];$$

$$A_{34} = 2\nu n(n+1) \left[-\sqrt{\frac{S}{\nu}}k_{n+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + (n-1)k_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \right];$$

$$A_{35} = (n-1)(n+2) - \frac{Q^2}{4\pi}(n-1); \quad A_{41} = nR_0^{(n-1)};$$

$$A_{42} = -(n+1)R_0^{-(n+2)};$$

$$A_{43} = \frac{n(n+1)}{R_0}i_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0 \right);$$

$$A_{44} = \frac{n(n+1)}{R_0}R_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0 \right); \quad A_{45} = 0;$$

$$A_{51} = R_0^{(n-1)}; \quad A_{52} = R_0^{-(n+2)};$$

$$A_{53} = \sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{n+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0 \right) + \frac{(n+1)}{R_0}i_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0 \right);$$

$$A_{54} = -\sqrt{\frac{S}{\nu}}k_{n+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0 \right) + \frac{(n+1)}{R_0}k_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0 \right); \quad A_{55} = 0;$$

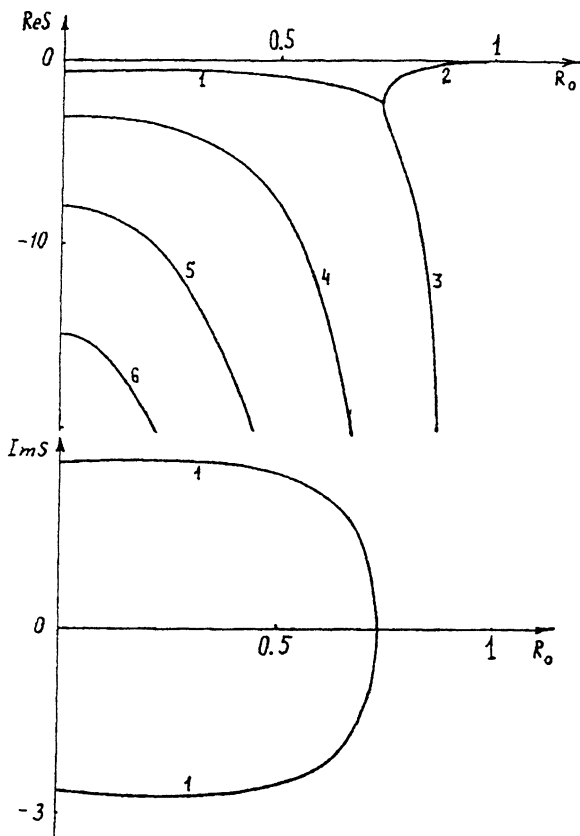


Рис. 1. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты S реализующихся капиллярно-полоидальных движений жидкости от величины безразмерного радиуса ядра R_0 , рассчитанные для основной моды ($n = 2$) при $\nu = 0.1$; $W = 0$.

S — комплексная частота; $i_n(x)$ и $k_n(x)$ — сферические цилиндрические функции первого и третьего родов соответственно [6].

Результаты численных расчетов по (7) представлены на рис. 1–2 в виде зависимостей вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты S от безразмерного радиуса твердого ядра R_0 для основной ($n = 2$) и шестой ($n = 6$) мод при $W = 0$, $\nu = 0.1$. Несложно видеть, что при принятой величине вязкости область значений радиуса ядра R_0 , в которой существуют капиллярные колебания для шестой моды, шире, чем для основной в противоречии с тем, что мы имеем для капли без ядра [6]. Это указывает на определяющую роль для тонких слоев жидкости затухания дви-

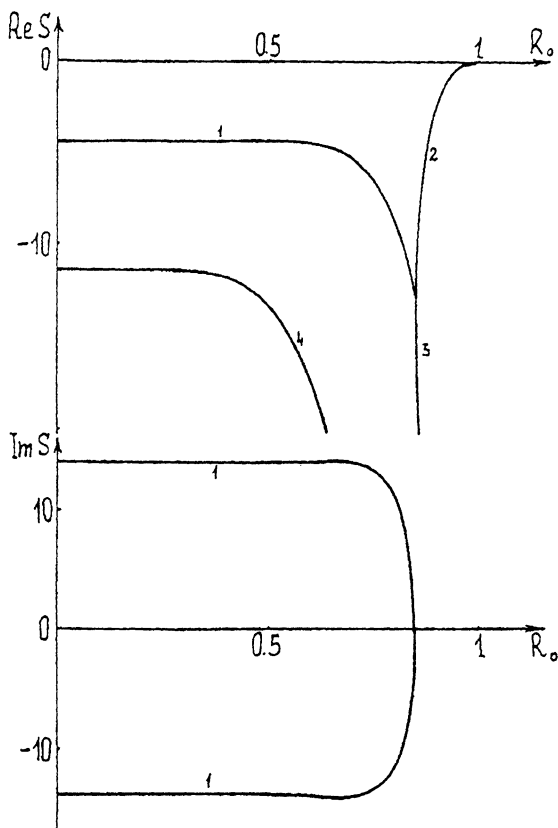


Рис. 2. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты S реализующихся капиллярно-полоидальных движений жидкости от величины безразмерного радиуса ядра R_0 , рассчитанные для моды с $n = 6$ при $\nu = 0.1$; $W = 0$.

жений на твердом дне. Этот феномен должен сказываться (за счет ограничения спектра реализующихся капиллярных движений) на закономерностях развития финальной стадии неустойчивости заряженной поверхности жидкости, когда на ней формируются эмиссионные выступы и начинается сброс избыточного заряда [7]. В частности, в достаточно тонких слоях вязкой жидкости, когда затухание на дне подавляет несколько первых мод капиллярных колебаний жидкого слоя, реализация неустойчивости будет идти за счет преимущественного развития первой не подавляющейся вязкостью высокой моды с номером $n \equiv n_*$. Это приведет к формированию на неустойчивой по отношению к собственному заряду поверхности жидкого слоя не двух эмиссион-

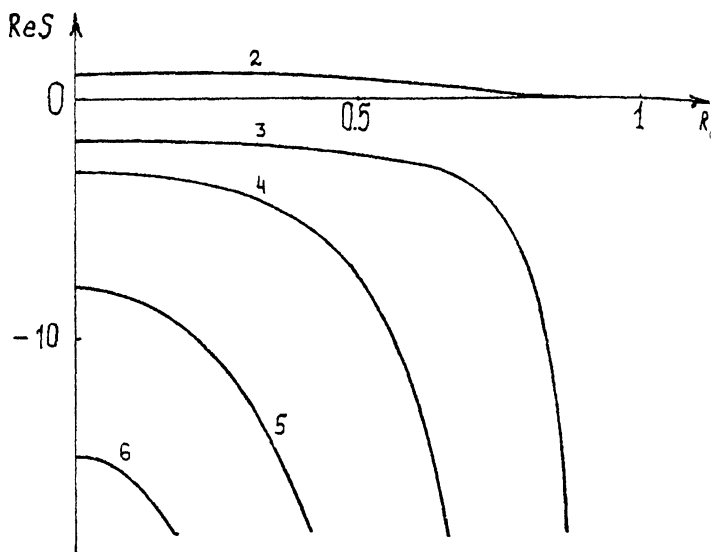


Рис. 3. Зависимости вещественной компоненты безразмерной частоты S реализующихся капиллярно-полоидальных движений жидкости от безразмерного радиуса ядра R_0 , рассчитанные при $\nu = 0.03$; $W = 5$; $n = 2$.

ных выступов, как это имеет место для капли без ядра [7], а n_* . По-видимому, именно такая ситуация зафиксирована на фотографии в [8, с. 247].

На рис. 3 приведены результаты расчета вещественной компоненты частоты для основной моды при закритическом заряде: $W = 5$ (отметим, что в принятых обозначениях критическое для реализации неустойчивости жидкого слоя по отношению к собственному заряду значение параметра W , характеризующего заряд, $W = 4$). Ветвь капиллярных движений, расположенная выше оси абсцисс, определяет инкремент неустойчивости заряженной поверхности жидкого слоя. Несложно видеть, что, начиная примерно с $R_0 \approx 0.8$, величина инкремента по сравнению с каплей без ядра быстро уменьшается. Так, при $R_0 = 0.8$ она меньше инкремента для капли без ядра (при $R_0 = 0$) примерно на порядок, при $R_0 \approx 0.9$ — на два порядка, а при $R_0 \approx 0.99$ инкремент падает на четыре порядка.

Из рис. 1–3 можно также видеть, что чисто полоидальные аperiодические вихревые движения (описываемые ветвями дисперсионного уравнения с номерами, большими 3) характеризуются декрементами, весьма быстро растущими с увеличением радиуса ядра R_0 , что также указывает на важную роль затухания движений этого типа на твердом дне.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 5. С. 6-14.
- [2] Золотой Н.Б., Карпов Г.В., Скурят В.Е. // ЖТФ. 1988. Т. 58. № 2. С. 315-323.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. № 12. С. 9-20.
- [4] Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. // ЖТФ. 1990. Т. 60. В. 6. С. 29-36.
- [5] Ширяева С.О., Лазарянец А.Э. и др. // Препринт ИМРАН № 27. Ярославль, 1994. 126 с.
- [6] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [7] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. № 3. С. 19-28.
- [8] Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979. 320 с.

Поступило в Редакцию
27 марта 1996 г.
