05.1;05.4;12

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МАТРИЦЫ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ИЗ КОМОЗИТНОГО СВЕРХПРОВОДНИКА С КРИТИЧЕСКИМ ТРАНСПОРТНЫМ ТОКОМ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© *Е.А.Девяткин*

Пондеромоторное воздействие на проводники, расположенные в мощных сверхпроводящих магнитных системах, является одной из основных причин, приводящих к их механическому повреждению. В таких системах провода из композитного сверхпроводника (КСП) находятся в неферромагнитной матрице. При расчете их напряженно-деформированного состояния (НДС), как правило, используют макроскопический подход. Вычисление локальных напряжений в общем случае требует использования численных методов. В [1], например, методом конечных элементов исследованы поля напряжений в композите с проводами круглого сечения. Для простых аналитических оценок локальных напряжений в системе со слабым упругим взаимодействием между проводами представляет интерес расчет НДС матрицы и изолированного включения из КСП в свободной от напряжений в дали от него матрице. Влияние макроскопического поля напряжений можно затем учесть наложением на полученное решение известного решения задачи о включении в однородном на бесконечности поле напряжений [2], определяемом из рассмотрения макроскопической задачи.

Ниже исследуется поле упругих напряжений в бесконечной матрице и длинном цилиндрическом включении круглого сечения из КСП с критическим транспортным током, находящимся в постоянном внешнем магнитном поле.

Цель работы состоит в определении величин полей и токов, при которых возможно появление трещин в материалах.

Рассмотрим "впаянное" в бесконечную неферромагнитную матрицу длинное круглое включение из КСП с протекающим вдоль его оси (ось oz; поперечными токами пренебрегаем) транспортным током, равным критическому ($I = I_s$), и находящееся в постоянном внешнем однородном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}_a$. Будем считать, что реализуется состояние плоской деформации и провод содержит достаточно много сверхпроводящих жилок, так что при описании его физико-механических свойств справедлив макроскопический подход. Включение и матрицу считаем однородными и изотропными, их модули Юнга и коэффициенты Пуассона — равными $E^{(i)}$, $\nu^{(i)}$ и $E^{(e)}$, $\nu^{(e)}$.

За счет взаимодействия тока плотностью $\mathbf{j}_s$ с магнитным полем $\mathbf{B}$ на провод действует сила Лоренца объемной плотностью $\mathbf{f} = \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{B}$. Продольная составляющая поля не дает вклада в объемную силу, поэтому без ограничения общности полагаем $B_z = 0$. Магнитное поле $\mathbf{B}$ представляет собой суперпозицию полей тока провода $\mathbf{B}_j$ и внешнего поля $\mathbf{B}_a$ ($\mathbf{B} = \mathbf{B}_j + \mathbf{B}_a$). Задача о взаимодействии продольного тока провода в оболочке при $I \leqslant I_s$ со своим собственным магнитным полем $\mathbf{B}_j$ под действием объемной силы $\mathbf{f}_j = \mathbf{j}_s \times \mathbf{B}_j$ рассмотрена ранее в [3]. Найдем НДС матрицы и включения, обусловленное взаимодействием тока с внешним магнитным полем B_a, направленным вдоль оси ox. Объемная сила $f_a = j_s B_a$ ($\mathbf{f} = \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_a$), действующая на включение, постоянна и направлена вдоль оси oy. Внутри включения единичного радиуса уравнения равновесия и совместности имеют вид [2]

$$\delta^{(i)}_{xx,x}+\delta^{(i)}_{xy,y} = 0, \quad \delta^{(i)}_{yy,y}+\delta^{(i)}_{xy,x}+4W = 0, \quad \Delta(\delta^{(i)}_{xx}+\delta^{(i)}_{yy}) = 0. \quad (1)$$

Здесь $W = B^{(s)}_j B_a/(2\mu_0)$, $B^{(s)}_j$ — индукция магнитного поля транспортного тока на поверхности включения, μ_0 — магнитная постоянная. Для напряжений в матрице $\delta^{(e)}_{ik}$ $(i, k = x, y)$ имеем аналогичные однородные уравнения. При плоской деформации $\delta^{(i,e)}_{zz} = \nu^{(i,e)}(\delta^{i,e}_{xx} + \delta^{i,e}_{yy})$. Из условия склейки матрицы и включения на границе раздела сред следует непрерывность перемещений $\mathbf{u}^{(i,e)}$, нормальных и касательных к ней напряжений

$$[\delta_n] = 0, \quad [\delta_\tau] = 0, \quad [\mathbf{u}] = 0, \quad \text{при } r = 1. \quad (2)$$

В качестве частного решения уравнений (1) удобно взять $\delta^{(0)}_{xx} = \delta^{(0)}_{yy} = -4Wy, \delta^{(0)}_{xy} = 0$. Будем искать решение внутренней задачи в виде $\delta^{(i)}_{ik} = \delta^{(0)}_{ik} + \tilde{\delta}^{(i)}_{ik}$. Тогда для напряжений $\tilde{\delta}^{(i)}_{ik}$ имеем однородные уравнения равновесия и совместимости, а условия на границе (2) примут вид

$$[\tilde{\delta}_n] = 4W\sin\theta, \quad [\tilde{\delta}_\tau] = 0, \quad [\mathbf{u}] = 0 \text{ при } r = 1, \quad (3)$$

где θ — полярный угол. Исходя из общего вида функции Эри в полярных координатах [5], условий на границе (3), ограниченности напряжений внутри включения и их стремления к нулю при $r \to \infty$, решение ищем в виде

$$\tilde{\delta}_{rr}^{(i)} = ar\sin\theta, \quad \delta_{rr}^{(e)} = -\left[br^{-3} - (c+d)r^{-1}\right]\sin\theta,$$

$$\tilde{\delta}_{\theta\theta}^{(i)} = 3ar\sin\theta, \quad \delta_{\theta\theta}^{(e)} = \left(br^{3} + cr^{-1}\right)\sin\theta, \tag{4}$$

$$\tilde{\delta}_{r\theta}^{(i)} = -ar\cos\theta, \quad \delta_{r\theta}^{(e)} = \left(br^{-3} - cr^{-1}\right)\cos\theta.$$

Из условий для скачков напряжений при $r = 1$ (3), (4), с учетом того, что при $r \to \infty$ решение внешней задачи известно (задача о действии на плоскости в направлении оси oy сосредоточенной силы в расчете на единицу длины включения, равной $I_s B_a$ [2,4]), имеем $a+b = c = W(1-2\nu^{(e)})/(1-\nu^{(e)})$, $d = -4W$.

Найдем соответствующие напряжениям $\delta_{lm}^{(i,e)}$ $(l, m = r, \theta)$ перемещения $\mathbf{u}^{(i,e)}$. Определяя деформации $\varepsilon_{lm}^{(i,e)}$ из закона Гука и интегрируя уравнения $\varepsilon_{rr}^{(i,e)} = u_{r,r}^{(i,e)}$, $\varepsilon_{\theta\theta}^{(i,e)} = (u_r^{(i,e)} + u_{\theta,\theta}^{(i,e)})/r, \varepsilon_{r,\theta}^{(i,e)} = (u_{r,\theta}^{(i,e)} - u_\theta^{(i,e)})/r + u_{\theta,r}^{(i,e)}$ с учетом симметрии задачи относительно оси oy и известного решения $\mathbf{u}^{(e)}$ при $r \to \infty$ [4], получаем

$$u_r^{(i)} = \frac{1+\nu^{(i)}}{2E^{(i)}}\left\{e + \left[\left(1 - 4\nu^{(i)}\right)a - 4W(1-2\nu^{(i)})\right]r^2\right\}\sin\theta,$$

$$u_\theta^{(i)} = \frac{1+\nu^{(i)}}{2E^{i}}\left\{e - \left[\left(5 - 4\nu^{(i)}\right)a - 4W\left(1-2\nu^{(i)}\right)\right]r^2\right\}\cos\theta,$$

$$u_r^{(e)} = \frac{1+\nu^{(e)}}{\varepsilon^{(e)}}\left(\frac{b}{2}r^{-2} - W\frac{3-4\nu^{(e)}}{1-\nu^{(e)}}\ln r\right)\sin\theta, \tag{5}$$

$$u_\theta^{(e)} = -\frac{1+\nu^{(e)}}{E^{(e)}}\left[\frac{b}{2}r^{-2} + W\left(\frac{1}{1-\nu^{(e)}} + \frac{3-4\nu^{(e)}}{1-\nu^{(e)}}\ln r\right)\right]\cos\theta.$$

Здесь e — постоянная интегрирования. Из условия непрерывности перемещений при $r = 1$ (2) и (5) находим неизвестные коэффициенты

$$a = 2W\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right), \qquad b = W\left(\frac{2}{\varkappa} - \frac{1}{1-\nu^{(e)}}\right),$$

$$e = 4W\left(1 - \frac{1}{\varkappa} - \frac{\varkappa - 3 + 4\nu^{(i)}}{4(1-\nu^{(e)})}\right),$$

где

$$\varkappa = 3 - 4\nu^{(i)} + E^{(i)}(1+\nu^{(e)})/\left[E^{(e)}(1+\nu)^{(i)}\right].$$

Суперпозиция полученного здесь решения и решения задачи о взаимодействии транспортного тока со своим собственым магнитным полем [3], в котором полагаем $I = I_s$ и устремляем внешний радиус оболочки провода к бесконечности, дает решение задачи о взаимодействии транспортного тока с магнитным полем $\mathbf{B} = \mathbf{B}_j + \mathbf{B}_a$:

$$\delta_{rr}^{(i)} = \frac{B_j^{(s)}}{2\mu_0}\left\{B_j^{(s)}\left[\alpha - \frac{3-2\nu^{(i)}}{2(1-\nu^{(i)})}(1-r^2)\right] - \right.$$

$$\left. -2B_a\left(1+\frac{1}{\varkappa}\right) r\sin\theta\right\},$$

$$\delta_{\theta\theta}^{(i)} = \frac{B_j^{(s)}}{2\mu_0}\left\{B_j^{(s)}\left[\alpha - 1 + \frac{(1+2\nu^{(i)})r^2 - 1}{2(1-\nu^{i})}\right] + \right.$$

$$\left. +2B_a\left(1-\frac{3}{\varkappa}\right) r\sin\theta\right\},$$

$$\delta_{rr}^{(e)} = \frac{B_j^{(s)}}{2\mu_0}\left\{\alpha B_j^{(s)} r^{-2} - B_a\left[\frac{3-2\nu^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} r^{-1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{1}{1-\nu^{(e)}} - \frac{2}{\varkappa}\right) r^{-3}\right]\sin\theta\right\}, \qquad (6)$$

$$\delta_{\theta\theta}^{(e)} = \frac{B_j^{(s)}}{2\mu_0}\left\{-\alpha B_j^{(s)} r^{-2} + B_a\left[\frac{1-2\nu^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} r^{-1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{1}{1-\nu^{(e)}} - \frac{2}{\varkappa}\right) r^{-3}\right]\sin\theta\right\},$$

$$\delta_{r\theta}^{(i)} = -\frac{B_j^{(s)} B_a}{\mu_0}\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right) r\cos\theta,$$

$$\delta_{r\theta}^{(e)} = -\frac{B_j^{(s)} B_a}{2\mu_0}\left[\frac{1-2\nu^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} r^{-1} + \left(\frac{1}{1-\nu^{(e)}} = \frac{2}{\varkappa}\right) r^{-3}\right]\cos\theta.$$

Здесь $\alpha = [(\varkappa - 1)/(1-2\nu^{(i)}) - 1]^{-1}$. В представляющем практический интерес случае $B_a \gg B_j$ из-за быстрого убывания в (6) членов $\simeq r^{-3}$ при расстояниях между поверхностями проводов, составляющих уже несколько их радиусов провода можно рассматривать как сосредоточенные источники и учитывать их действие друг на друга как действие сосредоточенных сил.

В качестве матрицы в сверхпроводящих соленоидах часто используют эпоксидную смолу (ЭС), обладающую при гелиевых температурах низким пределом прочности на сдвиг $\tau_f = (1-6) \cdot 10^6$ н/м^2 [1]. Определим величину индукции внешнего магнитного поля $B_a^{(f)}$ при которой начнется растрескивание эпоксидной матрицы, места расположения трещин и их ориентацию. Для типичного провода из КСП и ЭС $E^{(i)} \approx 10^{11}$ н/м^2, $\nu^{(i)} \approx 0.3$, $E^{(e)} = 8 \cdot 10^9$ н/м^2, $\nu^{(e)} = 0.36$ [1,6] ($\varkappa \approx 15$). При $\varkappa \gg 1$ и $B_j/B_a \ll \varkappa$ напряжения определяются взаимодействием тока с внешним магнитным полем. Тогда максимальные касательные напряжения в матрице $\tau_{\max}^{(e)}$ достигаются на поверхности провода при $\theta = 0, \pi$ и равны $|\tau_{\max}^{(e)}| = B_j^{(s)} B_a/\mu_0$. Следовательно, $B_a^{(f)} = 2\tau_f/(j_s R)$ и, например, для провода радиусом $R = 10^{-3}$ м с $j_s = 10^9$ А/м^2 растрескивание произойдет параллельно координатным осям в поле с поперечной составляющей индукции $B_a^{(f)} = 2-12$ Тл. Минимальная энергия $E_{\min}$, приводящая к разрушению сверхпроводимости при гелиевых температурах, в проводе из КСП с медной матрицей диаметром 10^{-3} м и длиной $l = 10^{-2}$ м составляет $E_{\min} \simeq 10^{-5}$ Дж [7]. При образовании в ЭС вдоль диаметрально противоположных образующих такого провода двух трещин шириной всего $h \simeq 10^{-4}$ м выделяется значительно большая энергия $E = 2\gamma l h \simeq 10^{-4}$ Дж, где $\gamma = 100-200$ Дж/м^2 — энергия разрушения ЭС [1].

Таким образом, приведенные расчеты подтверждают наблюдающееся на практике явление растрескивания эпоксидной матрицы в сверхпроводящих соленоидах и указывают на возможность его проявления в элементах конструкций сверхпроводящих магнитных систем со слабым упругим взаимодействием между проводами при отсутствии температурного и макроскопического полей напряжений.

Список литературы

[1] *Bobrov E.S., Williams J.E.C., Iwasa Y.* // Cryog. 1985. V. 25. N 6. P. 307–316.

[2] *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1968. 707 с.

[3] *Девяткин Е.А.* // Тезисы докл. IV Междунар. совещания-семинара "Инженерно-физические проблемы новой техники". М., 1996. С. 66–67.

[4] *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
[5] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
[6] *Гуревич А.Вл., Минц Р.Г., Рахманов А.Л.* Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.
[7] *Iwasa Y.* // IEEE Trans. Magn. 1992. V. 28. N 1. P. 113–120.

Институт проблем
механики
РАН
Москва

Поступило в Редакцию
25 марта 1996 г.