Письма в ЖТФ, том 22, вып. 15 12 августа 1996 г.

01

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© *Р.М.Асадуллин*

Многие прикладные задачи приводят к необходимости оценки параметров динамических моделей по измерениям некоторых характеристик процессов. Одна из возникающих при этом проблем связана с тем, что в реальных ситуациях возможно измерение не всех характеристик процессов, входящих в математическую модель (вектор $x(t) = x_1(t), \dots, x_n(t)$), а только некоторых из них (вектор $y(t) = y_1(t), \dots, y_m(t)$), что может привести к неединственности решения обратной задачи и физически необоснованным решениям при дальнейшем моделировании. В данной работе рассмотрены теоретические аспекты решения указанной проблемы для динамических систем с полиномиальными правыми частями.

Рассмотрим математическую модель процесса в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанную для удобства дальнейшего изложения в форме

$$\dot{x} = f(x, y, \theta), \tag{1}$$

$$\dot{y} = g(x, y, \theta), \tag{2}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Здесь через θ обозначен вектор идентифицируемых параметров по имеющимся измерениям, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$; $x_i(t) \in C^N(0, T)$, $N \geqslant m + 1$, функции $g_i(x, y, \theta)$ определены и непрерывны в области изменения переменных x_k, y_i, i, $j = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$. Предполагается линейная зависимость функций f_i и g_i от параметров θ_i.

Задачу определения параметров системы (1), (2) по измерениям $x_i(t)$ назовем обратной задачей. Анализу и решению обратной задачи уделяется в литературе достаточно много внимания, однако в большинстве работ рассматриваются вопросы принципиальной определимости (идентифицируемости) параметров (см., например, [1]). В случае неидентифицируемости остается открытым вопрос о том, какие параметры могут быть однозначно определены по заданной схеме эксперимента, иными словами, вопрос числа решений обратной задачи. Для нелинейных моделей вопрос числа решений обратной задачи практически неисследован. Решение этого вопроса имеет важное значение для оптимизации проведения экспериментальных исследований.

Основная идея рассматриваемого в работе подхода заключается в выделении из исходной модели (1), (2) подсистемы дифференциальных уравнений относительно только измеряемых переменных

$$\varphi_i\left(x^{(m+1)}, \ldots, x, \alpha\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Выделенная подсистема, содержащая искомые параметры в виде некоторых функциональных комбинаций $\alpha_k(\theta)$, полностью определяет все решения обратной задачи. Рассматриваемый в работе класс моделей позволяет свести задачу исключения переменных y_i из системы (1), (2) к чисто алгебраической и использовать хорошо разработанные методы компьютерной алгебры [2,3].

Алгоритмически задача нахождения всех решений обратной коэффициентной задачи может быть представлена последовательностью этапов и утверждений:

а) Продифференцируем систему (1) m раз и, заменяя при каждом дифференцировании производные $\dot{y}_i$ на правые части в соответствии с (2), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \theta),\\ \ddot{x} &= f_1(\dot{x}, x, y, \theta),\\ &\ldots\\ x^{(N+1)} &= f_N\left(x^{(N)}, \ldots, x, y, \theta\right),\end{aligned} \tag{4}$$

которую будем рассматривать в дельнейшем как систему многочленов $g_i \equiv x^{(i)} - f_{i-1}$ относительно переменных $x^{(N+1)}, \ldots, x, y, \theta$.

Утверждение 1. Для исключения вектора y из системы (1), (2) достаточно продифференцировать систему (1) m раз.

б) Исключим из системы (4) переменные y_i. Процесс исключения конечен, что следует из

Утверждения 2 (Теорема Гильберта о базисе [4]). Система многочленов (4) в множестве переменных $x_i^{(m+1)}, \ldots, x_i, y_i, \theta_k$ (в кольце многочленов) обладает конечным базисом или системой образующих многочленов.

Нахождение базиса сводится к использованию готовых пакетов программ в системах аналитических вычислений (см., например, [2,5], метод базисов Гребнера) либо метода результанта [4,6].

в) *Утверждение 3.* В построенный базис как подбзис входят и многочлены относительно только измеряемых характеристик процесса

$$\psi(x^{(m+1)}, \ldots, x, \alpha) = 0, \tag{5}$$

коэффициенты $\alpha_i(\theta)$ которых входят в (5) линейно.

Очевидно, уравнения (5), представляя собой некие аналоги регрессионных уравнений, легко разрешаются относительно $\alpha_i(\theta)$.

г) Число и вид коэффициентов $\alpha_i(\theta)$ определяют все решения обратной задачи. Для нахождения числа решений применяется та же техника базисов Гребнера.

Для некоторых систем техника исключения существенно упрощается. Приведем в качестве примера линейные системы.

В этом случае система (1)–(3) может быть записана в виде

$$\dot{x} = Ax + By, \tag{6}$$

$$\dot{y} = Cx + Dy, \tag{7}$$

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, \tag{8}$$

где элементы матриц A, B, C и D линейно зависят от коэффициентов θ.

После исключения вектора y из системы (6), (7) получаем следующую систему уравнений относительно x_i и их производных:

$$det\left(E_m\frac{d}{dt} - D\right)\left(E_n\frac{d}{dt} - A\right)x = BLCx, \tag{9}$$

$$x(0) = x_0, \ldots, x^{(m)}(0) = x_{m,0}, \tag{10}$$

где E_n и E_m — единичные матрицы порядков n и m соответственно, $\frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, $det\left(E_m\frac{d}{dt} - D\right)$ — определитель матрицы, $\left(E_m\frac{d}{dt} - D\right)$ представляет собой линейный дифференциальный оператор m-го порядка, матрица L — присоединенная к матрице $\left(E_m\frac{d}{dt} - D\right)$, следовательно система (9) представляет собой систему n дифференциальных уравнений $(m+1)$-го порядка относительно только измеряемых переменных x_i и их производных. Начальные условия восстанавливаются

m-кратным дифференцированием системы (6) и подстановкой вместо $\dot{y}$ правых частей системы (7).

Отметим, что восстановленные начальные данные (10) также могут дать дополнительную информацию о числе решений обратной задачи, но только в тех случаях, когда $y_i(0)$ заданы. Этот вопрос требует отдельного рассмотрения, в исследуемых моделях начальные данные $y_i(0)$ считаются неизвестными.

Список литературы

[1] *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 392 с.

[2] *Компьютерная* алгебра. Символьные и алгебраические вычисления / Под ред. Бухбергера Б. М.: Мир, 1986. 391 с.

[3] *Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э.* Компьютерная алгебра. М.: Мир, 1991. 350 с.

[4] *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. М., Наука, 1979. 623 с.

[5] Reduce User's Manual. Version 3.4 / Ed. by Hearn, A.C., Santa Monica, Rand Publication, 1991.

[6] *Асадуллин Р.М., Бахтизин Р.Н., Рамазанов М.Д.* // ИФЖ. 1989. Т. 56. № 4. С. 691–692.

Поступило в Редакцию
24 апреля 1996 г.