Письма в ЖТФ, том 22, вып. 20 26 октября 1996 г.

01;08;09

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НА НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ «ВОЛНОВОД-РЕЗОНАТОРЫ»: ЯВНОРЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ

© *И.Ю.Попов, С.Л.Попова*

Проблема собственных значений, находящихся на непрерывном спектре, в последнее время очень активно обсуждается как с математической, так и с физической стороны. С математической точки зрения интерес подогревается тем, что в настоящее время еще не создано общей теории, позволяющей эффективно описывать ситуацию, с физической — тем, что эта задача тесно связана с вопросом описания транспортных свойств данных систем. При этом обычно анализируют конкретные задачи, в которых эта ситуация может возникнуть [1,2]. Отметим, что задача о собственных значениях, находящихся ниже границы непрерывного спектра для резонаторов, открытых в волновод, гораздо проще данной и существенно лучше изучена (см., например, [3,4]). В настоящей работе рассматривается система из волновода и подсоединенных к нему резонаторов. Используется явнорешаемая модель щелей нулевой ширины, основанная на теории самосопряженных расширений симметрических операторов [5], позволяющая получить модельное дисперсионное уравнение в явном виде, а значит и найти указанное собственное значение. Это одно из преимуществ модели, поскольку обычно [6] удается лишь доказать существование таких собственных значений и дать некоторые оценки.

Рассмотрим двумерный оператор Лапласа $-\Delta$ с условием Неймана на границе для симметричной относительно оси OX системы, показанной на рис. 1. Пространство L_2, в котором рассматривается оператор, представим в виде ортогональной суммы подпространств H_s и H_a четных и, соответственно, нечетных по переменной y функций. Данные подпространства инварианты относительно оператора $-\Delta$. Отметим, что функции из области определения оператора $-\Delta|_{H_a}$ удовлетворяют условию Дирихле на оси OX. Поэтому для непрерывных спектров имеем: $\sigma_{\text{cont}}(-\Delta|_{H_a}) = [\pi(2d)^{-1}, \infty)$, $\sigma_{\text{cont}}(-\Delta|_{H_s}) = [0, \infty)$. Расчет спектра системы проводим, используя модель щелей нулевой ширины, в которой малое отверстие связи резонатора и волновода заменяется на точечное так, что модельное реше-

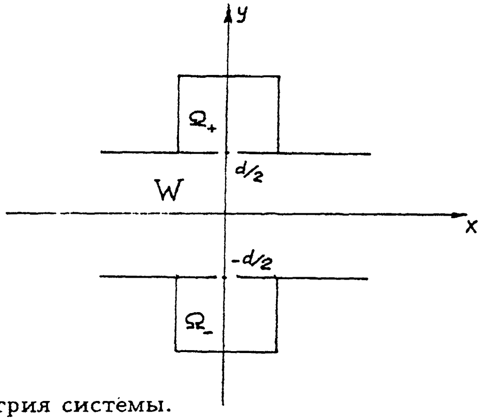

Рис. 1. Геометрия системы.
W — волновод, $\Omega_\pm$ — резонатор, d — ширина волновода.

ние есть главный член асимптотики по ширине δ отверстия реального решения. Дисперсионное уравнение для $-\Delta|_{H_a}$ в модели:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}(\lambda_{nm}-\lambda)^{-1}(\lambda_{nm}-\lambda_0)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}2^{-1}\left(p_n^{-1}(\lambda)-p_n^{-1}(\lambda_0)\right), \quad (1)$$

где λ_{nm} — собственные значения для резонатора $\Omega_\pm$, $\lambda_0 = \delta^{-2}$, $p_n(\lambda) = \sqrt{\lambda-(\pi n/(2d))^2}$. Легко видеть, что уравнение (1) при условии

$$\min_{n,m}\lambda_{nm} < (2d)^{-1} \quad (2)$$

имеет при достаточно малом δ вещественный корень, меньший чем $\pi(2d)^{-1}$. Для полного оператора $-\Delta|_{H_a}\oplus(-\Delta)|_{H_s}$ в этом случае имеем собственное значение на непрерывном спектре, заполняющем $[0,\infty)$.

Отметим, что при обычном подходе к данной задаче доказывают с помощью вариационных методов лишь то, что существует собственное значение оператора $-\Delta|_{H_a}$, меньшее $\pi(2d)^{-1}$. Это осуществляется предъявлением пробной функции φ, для которой

$$\iint\limits_{W\cup\Omega_+\cup\Omega_-}|\nabla\varphi|^2dS\left(\iint\limits_{W\cup\Omega_+\cup\Omega_-}|\varphi|^2dS\right)^{-1} < \pi(2d)^{-1}.$$

В данной ситуации это означает наличие собственного числа на непрерывном спектре для полного оператора, но не

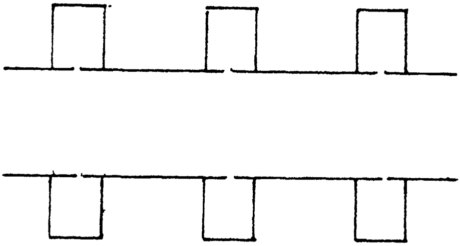

Рис. 2. Периодическая система резонаторов, соединенных с волноводом.

дает эффективного алгоритма его вычисления. Кроме того, при таком анализе удается рассмотреть лишь волновод с условием Неймана на границе (акустический волновод), ибо в случае условия Дирихле доказательство того, что у оператора $-\Delta|_{H_a}$ есть собственное число ниже границы непрерывного спектра, не говорит о наличии собственного значения на непрерывном спектре для полного оператора, поскольку здесь непрерывный спектр полного оператора заполняет уже не всю положительную полуось, а лишь $[\pi/d, \infty)$. В нашей же модели дисперсионное уравнение в случае условия Дирихле имеет тот же вид (1), в котором $p_n(\lambda) = \sqrt{\lambda - 4(\pi n/d)^2}$, и достаточным условием наличия собственного значения на непрерывном спектре является

$$\pi d^{-1} < \min_{n,m} \lambda_{nm} < 2\pi d^{-1}. \tag{3}$$

При этом само это собственное значение легко находится с помощью численного решения дисперсионного уравнения. Таким образом, данная модель позволяет указать условия существования собственного значения на непрерывном спектре и эффективно вычислять его как в случае условия Неймана (акустический волновод), так и в случае условия Дирихле (квантовый волновод).

Указанная модель дает также возможность описать и более сложный случай — зона, находящаяся на непрерывном спектре. При этом необходимо рассмотреть соответствующую периодическую систему (рис. 2). Расчет ее в рамках модели проводится способом, аналогичным тому, что использован в [7,8]. При этом достаточные условия существования подобной зоны оказываются такими же, как и для собственных значений ((2) и (3)), а дисперсионное уравнение, хотя и гораздо более сложное, тоже получается в явном виде.

В заключение отметим, что физические эффекты, связанные с наличием рассматриваемых собственных значений (зон), могут использоваться при разработке конкретных устройств, аналогично тому, как это делается в [9] с использованием эффекта "запирания" и "отпирания" волновода.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 95-01-00439, № 96-01-00074 и Международного научного фонда.

Авторы благодарят А.Г. Костюченко за стимулирующие вопросы и Л. Парновского за интересное обсуждение.

Список литературы

[1] *Набоко С.Н., Пушницкий А.Б.* // Функц. анал. и его прилож. 1995. Т. 29. В. 4. С. 31–44.
[2] *Evans D.V., Fernyhough M.* // J. Fluid Mech. 1995. V. 297. P. 307–325.
[3] *Попов А.Н.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 10. С. 1916–1922.
[4] *Белинский Б.П.* // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 1. С. 14–17.
[5] *Попов И.Ю., Попов С.Л.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. № 1. С. 23–31.
[6] *Парновский Л.* // Межд. конф. "Дифф. ур. и прил." 1996. М.: МГУ. С. 5.
[7] *Павлов Б.С., Попов И.Ю.* // ТМФ. 1991. Т. 86. № 3. С. 391–401.
[8] *Попов И.Ю., Попова С.Л.* // Биофизика. 1995. Т. 40. № 2. С. 443–447.
[9] *Попова С.Л.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 6. С. 55–57.

Санкт-Петербургский государственный
институт точной механики и оптики

Поступило в Редакцию
7 мая 1996 г.