

## НОРМАЛЬНЫЙ АВТОСОЛИТОН И ВОЛНА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В ТОНКОЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛЕНКЕ С ТОКОМ

© А.С.Рудый

В работе [1] показано, что неоднородное состояние равновесия тонкой сверхпроводящей пленки в цепи переменного тока при конвективном теплообмене на ее поверхности бистабильно. Природа бистабильности легко выясняется предельным переходом  $\delta \rightarrow \infty$ , где  $\delta$  — длина пленки. Можно показать, что для одного из состояний равновесия нормальная фаза распространяется на всю пленку, а для другого — остается локализованной. Такие локализованные неоднородные устойчивые образования в диссипативных системах принято называть автосолидонами. В ряду состояний равновесия сверхпроводящей пленки бесконечной длины автосолитон занимает промежуточное положение между сверхпроводящим и нормальными однородными состояниями. Переход между ними носит характер волнового процесса, при котором в пленке распространяется волна переключения. Целью настоящей работы является построение автомодельных решений, описывающих автосолитон и волны переключения в тонкой сверхпроводящей пленке.

Впервые проблема нормального автосолитона и волны переключения возникла в связи с тепловым разрушением сверхпроводимости в проводниках с транспортным током. При исследовании подобных задач широко использовались механические аналогии, основанные на изоморфности соответствующих математических моделей, записанных в автомодельных переменных, уравнению движения материальной точки в поле консервативных и диссипативных сил. В частности, автосолитоны и волны переключения были получены как некоторые траектории механического образа системы, вдоль которых выполняются законы сохранения [2,3]. Однако в ряде случаев необходима точная картина температурного поля сверхпроводника, а не общее представление о ее механическом аналоге. Например при исследовании динамики ограниченного сверхпроводника, более сложном, чем анализ вырожденной (по параметру  $\delta$ ) системы, полезно знать асимптотику его стационарных состояний и промежуточную асимптотику переходных режимов.

Рассмотрим сверхпроводящую пленку толщины  $h = 10^{-6} - 10^{-7}$  м, длина которой много больше характерного

размера температурной неоднородности. Введем обозначения:  $\Theta(\vartheta) = [T(\vartheta) - T_0]/T_c$ , где  $T(\vartheta)$  — температура пленки,  $\vartheta = x - vt$  — автомодельная переменная,  $T_0$  — температура хладагента,  $T_c$  — критическая температура. Математическая модель системы имеет вид

$$\Theta_s''(\vartheta) + \frac{v}{a_s} \Theta_s'(\vartheta) - b_s \Theta_s(\vartheta) = 0; \quad \vartheta \in [\vartheta_b^-, \vartheta_b^+], \quad (1)$$

$$\Theta_n''(\vartheta) + \frac{v}{a_n} \Theta_n'(\vartheta) - b_n \Theta_n(\vartheta) + W = 0; \quad \vartheta \in [\vartheta_b^-, \vartheta_b^+],$$

где  $a$  — коэффициент температуропроводности,  $\vartheta_b^\pm$  — координаты фазовой границы. Комплексы  $b_s = 2\alpha/h\lambda_s$ ,  $b_n = (2\alpha/h - \beta\rho_0\overline{j^2})/\lambda_n$  и  $W = \rho_0\overline{j^2}/\lambda_n T_c$ , где  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\beta$  — температурный коэффициент сопротивления,  $\rho_0$  — критическое удельное сопротивление пленки,  $\overline{j^2}$  — среднее за период значение плотности тока характеризуют тепловыделение и тепловые потери в системе, а индексы  $s$  и  $n$  обозначают сверхпроводящую и нормальную фазы соответственно.

Первоначально рассмотрим случай локальной неоднородности, для которого краевые условия можно задать в виде

$$\begin{aligned} \Theta_s'(\vartheta)|_{\vartheta=\infty} &= 0, \\ \Theta_n'(\vartheta)|_{\vartheta=0} &= 0, \\ \Theta_s(\vartheta_b^\pm) &= \Theta_n(\vartheta_b^\pm) = 1, \\ \lambda_s \Theta_s'(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_b^\pm} &= \lambda_n \Theta_n'(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_b^\pm}, \end{aligned} \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2) для  $n$ -области имеет вид

$$\Theta_n(\vartheta) = \sigma - (\sigma - 1) \exp \nu(\vartheta_b^\pm - \vartheta) \frac{\nu \operatorname{sh}(\mu\vartheta) + \mu \operatorname{ch}(\mu\vartheta)}{\nu \operatorname{sh}(\mu\vartheta_b^\pm) + \mu \operatorname{ch}(\mu\vartheta_b^\pm)}, \quad (3)$$

где  $\nu = v/2a_n$ ,  $\mu = \sqrt{v^2/4a_n^2 + b_n}$ ,  $\sigma = W/b_n$  — параметр Стекли, а знак при координате фазовой границы соответствует знаку числовой полуоси, содержащей текущее значение автомодельной переменной. В  $s$ -области температура пленки убывает по закону

$$\Theta_s(\vartheta) = \exp [(\nu_s \pm \mu_s)(\vartheta_b^\pm - \vartheta)], \quad (4)$$

где  $\nu_s = v/2a_s$ ,  $\mu_s = \sqrt{v^2/4a_s^2 + b_s}$ .

Условие непрерывности теплового потока на свободных границах приводит к следующим выражениям для их координат:

$$\vartheta_b^\pm = \frac{1}{\mu} \operatorname{arcth} \frac{\nu}{\mu} \left[ \frac{\lambda_n}{\lambda_s} \frac{\mu^2 - \nu^2}{\nu_s \pm \mu_s} \frac{(\sigma - 1)}{\nu} - 1 \right]. \quad (5)$$

Очевидно, что при значениях параметра  $\vartheta_b^\pm$ , определенных для произвольно заданной скорости  $\nu$ , функция (3) в нуле претерпевает разрыв первого рода. Требование непрерывности решения (3) приводит к соотношению

$$\exp \nu(\vartheta_b^+ - \vartheta_b^-) = \frac{\nu_s - \mu_s}{\nu_s + \mu_s} \frac{\operatorname{sh} \mu \vartheta_b^+}{\operatorname{sh} \mu \vartheta_b^-}, \quad (6)$$

которое в совокупности с (5) позволяет найти параметры  $\vartheta_b^\pm$  и  $\nu$ .

В общем случае определение  $\vartheta_b^\pm$  и  $\nu$  сводится к решению трансцендентного уравнения и может быть выполнено численными методами только при заданных значениях остальных параметров системы. Однако для ряда материалов<sup>1</sup> скачок теплоемкости при переходе в сверхпроводящее состояние настолько мал, что можно положить  $\nu_s = \nu$ ,  $\mu_s = \mu$  и численно разрешить систему уравнений (5), (6) относительно  $\mu = \mu(\nu)$ , задав произвольно лишь один параметр Стекли. Вычисления показывают, что система (5), (6) совместна только при  $\nu = 0$ , а соответствующие решения задачи (1), (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \Theta_s(\vartheta) &= \exp \sqrt{b_s} (\vartheta_b^\pm - \vartheta), \\ \Theta_n(\vartheta) &= \sigma - (\sigma - 1) \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{b_n} \vartheta)}{\operatorname{ch}(\sqrt{b_n} \vartheta_b^\pm)}, \quad (7) \\ \vartheta_b^\pm &= \frac{1}{\sqrt{b_n}} \operatorname{arcth} \left[ \pm \frac{\lambda_n}{\lambda_s} \sqrt{\frac{b_n}{b_s}} (\sigma - 1) \right]. \end{aligned}$$

Решение (7) описывает температурное поле стационарного автосолитона (рис. 1). Те же самые выражения можно получить из приведенных в [1] решений, выполнив предельный переход  $\delta \rightarrow \infty$ . Таким образом, можно утверждать, что

<sup>1</sup> Например, классические сверхпроводники с высокой критической температурой и низкой температурой Дебая или высокотемпературные сверхпроводники с низким температурным коэффициентом сопротивления.

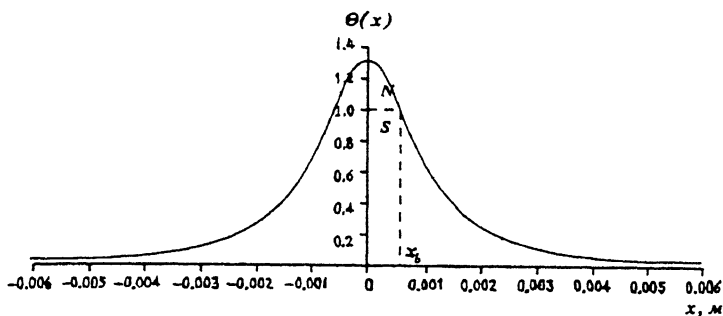


Рис. 1. Температурное поле стационарного автосолитона при  $\sigma = 3$  и  $\lambda_n = \lambda_s$ .

одно из неоднородных состояний равновесия ограниченной пленки соответствует стационарному нормальному автосолитону в пленке бесконечной длины.

Перейдем к исследованию нелокальных неоднородных решений уравнений (1). Легко видеть, что наряду с (3), (4) решениями задачи (1), (2) являются однородные состояния равновесия  $\Theta_s(\vartheta) = 0$ ,  $\vartheta_b^- = \vartheta_b^+ = \pm\infty$  и  $\Theta_n(\vartheta) = \sigma$ ,  $\vartheta_b^+ = \infty$ ,  $\vartheta_b^- = -\infty$ . Чтобы получить выражение для волны переключения между этими состояниями, необходимо положить  $\vartheta_b^- = -\infty$ , а краевые условия задать в виде

$$\Theta_n'(\vartheta)|_{\vartheta=-\infty} = \sigma,$$

$$\Theta_n'(\vartheta)|_{\vartheta=0} = 0, \quad (8)$$

$$\Theta_s(\vartheta_b) = \Theta_n(\vartheta_b) = 1,$$

$$\lambda_s \Theta_s'(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_b} = \lambda_n \Theta_n'(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_b}.$$

Решение задачи (1), удовлетворяющее краевым условиям (8), имеет вид

$$\Theta_n(\vartheta) = (1 - \sigma) \exp(\mu - \nu)(\vartheta - \vartheta_b) + \sigma, \quad (9)$$

$$\Theta_s(\vartheta) = \exp \nu_s(\vartheta - \vartheta_b).$$

Поскольку теперь начало координат никак не выделено относительно свободной границы, условие непрерывности потока приводит непосредственно к уравнению на скорость движения свободной границы

$$(\sigma - 1) \left( \sqrt{v^2 c_{vn}^2 + b_n \lambda_n^2} - v c_{vn} \right) = \sqrt{v^2 c_{vs}^2 + b_s \lambda_s^2} + v c_{vs}, \quad (10)$$

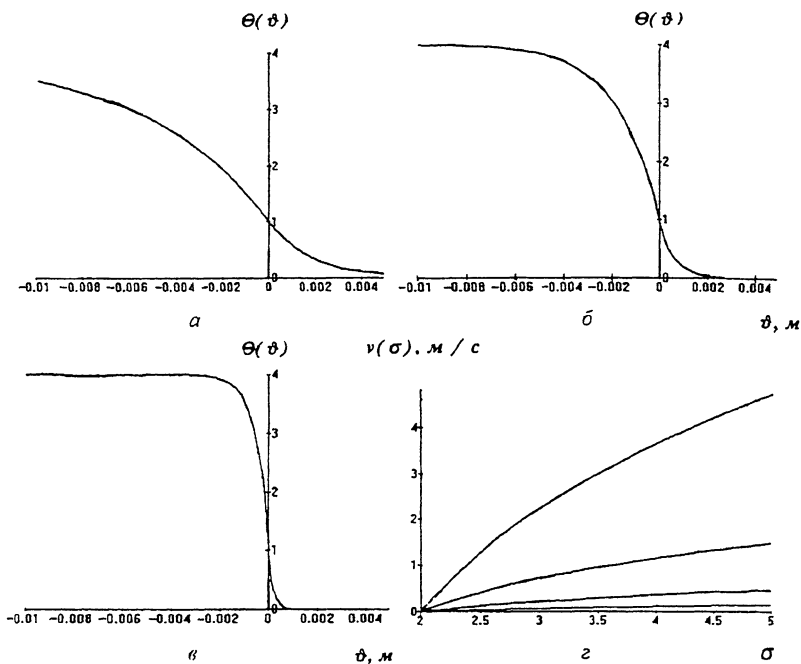


Рис. 2. Температурные профили волн переключения в тонкой сверхпроводящей пленке ( $a - \sigma = 4, b = 10^5$ ;  $b - \sigma = 4, b = 10^6$ ;  $v - \sigma = 4, b = 10^7$ ) и графики зависимости скорости волнового фронта от параметра Стекли ( $z$ ) при значениях комплекса  $2\alpha a^2/\lambda h = 0.01; 0.1; 1; 10$ .

где  $c_v$  — объемная теплоемкость. График зависимости скорости волны переключения от параметров системы и соответствующие температурные профили показаны на рис. 2.

Полученные выражения дают более ясное представление о распределении температуры в вырожденной сверхпроводящей системе, нежели решения в виде интегралов движения. Автосолитонные решения, являющиеся предельным случаем одного из неоднородных состояний равновесия ограниченной пленки, подтверждают предположение о природе бистабильности неоднородного стационарного состояния. Для ограниченных пленок, размер которых много больше размера автосолитона, решения типа волн переключения могут служить промежуточной асимптотикой переходных режимов.

## Список литературы

- [1] Рудый А.С. // Письма в ЖТФ, 22, Вып. 9, 85 (1996).
- [2] Гуревич А. Вл., Минц Р.Г., Рагманов А.Л. // Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.
- [3] Гуревич А.Вл., Минц Р.Г. // Письма ЖТФ, 31, Вып. 1, 52 (1980).

Ярославский государственный  
университет

Поступило в Редакцию  
5 апреля 1996 г.

