

## МЕХАНИЗМ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В СИСТЕМЕ С ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬЮ ТИПА «ХАОС-ХАОС»

© И.А.Хованов, В.С.Анищенко

Классический эффект стохастического резонанса (СР) [1,2] наблюдается в бистабильных системах, возмущаемых шумом и периодическим сигналом. Графики зависимости отношения сигнал/шум и коэффициента усиления от интенсивности шума носят резонансный характер. Эффект СР наблюдается при совпадении средней частоты переключений между состояниями и частотой сигнала [3].

Процесс переключений в бистабильной системе может не только индуцироваться шумом, но и быть следствием собственной динамики системы [4,5].

В ряде работ [4-7] показано, что явление СР наблюдается в системах, имеющих хаотическую динамику; в роли интенсивности шума может выступать внутренний параметр системы. Однако в этих работах не рассматривался вопрос связи спектральных характеристик на выходе системы со степенью когерентности (или синфазности) между периодическим возмущением и откликом системы. Ответ на этот вопрос и составляет предмет данной статьи.

Объектом исследований является симметричная нелинейная цепь Чуа, реализующая динамическую перемежаемость типа "хаос-хаос" [8-12], которую можно трактовать как обобщенный режим динамической бистабильности [4]. Динамика цепи Чуа описывается системой трех дифференциальных уравнений первого порядка [13]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y + F(t), \end{aligned} \tag{1}$$

$$h(x) = m_1 x + 1/2(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$$

и определяется значениями управляющих параметров:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $m_0$ ,  $m_1$ . Периодическое воздействие  $F(t) = a \cos(\omega_c t)$  вводится в третье уравнение, что отвечает наиболее корректному способу подключения источника напряжения в физическую цепь.

Зафиксируем все параметры автономной системы  $\beta = 14.286$ ,  $m_0 = -1/7$ ,  $m_1 = 2/7$ , кроме параметра  $\alpha$ , который теперь отвечает за собственную динамику системы. Исследования будем проводить методом численного моделирования. В качестве спектральных характеристик выберем отношение сигнал/шум  $SNR$  и коэффициент усиления  $\eta$ , которые определяются следующими соотношениями:

$$SNR = 10 \log \frac{S}{N}, \quad \eta = 10 \log \frac{S}{a^2}, \quad (2)$$

где  $S$  — высота пика в спектральной плотности мощности отклика на частоте внешнего сигнала  $\omega_c$ ,  $N$  — шумовой пьедестал на этой же частоте,  $a$  — амплитуда внешнего сигнала. Спектральные характеристики выходного сигнала будем анализировать двумя методами: двух состояний и полной динамики [4,14]. Спектральные характеристики, полученные методом двух состояний и полной динамики, отметим индексами  $t$  и  $f$  соответственно.

Степень когерентности отклика будем характеризовать плотностью распределения времен пребывания, распределением фазы сигнала в момент перехода из одного состояния в другое и средней частотой переключений между состояниями [4,14,15].

Время пребывания определяется промежутком времени между моментом перехода системы в выбранное состояние и моментом переключения в другое состояние. Моменту переключения соответствует определенная фаза сигнала  $\varphi \in [0 : 2\pi]$ . Время в распределении времен пребывания нормировано на период внешнего сигнала  $\tau = t/T_c$  ( $T_c = 2\pi/\omega_c$ ).

Гистограммы времен пребывания  $p(\tau)$  и фазы сигнала в момент переключения  $p(\varphi)$  будут определять также вероятностные меры процесса. Средний период переключений будет определяться как первый момент от  $p(\tau)$ :

$$\langle T \rangle = 2 \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{2}{t'} \int_0^{t'} \tau p(\tau) d\tau; \quad (3)$$

круговая частота переключений равна  $\langle \omega \rangle = 2\pi/\langle T \rangle$  и зависит от параметра системы  $\alpha$ , амплитуды  $a$  и частоты  $\omega_c$  внешнего сигнала.

Рассмотрим эволюцию характеристик системы в области возникновения перемежаемости типа “хаос–хаос” при изменении параметра  $\alpha$  для двух режимов внешнего воздействия: слабого  $a = 0.01$  и сильного  $a = 0.3$ .

Зависимости отношения сигнал/шум и коэффициента усиления от параметра  $\alpha$  для сильного и слабого воздействия носят резонансный характер (рис. 1, а и б). Зависимости  $SNR_f$  и  $SNR_t$  от  $\alpha$  для обоих режимов воздействия

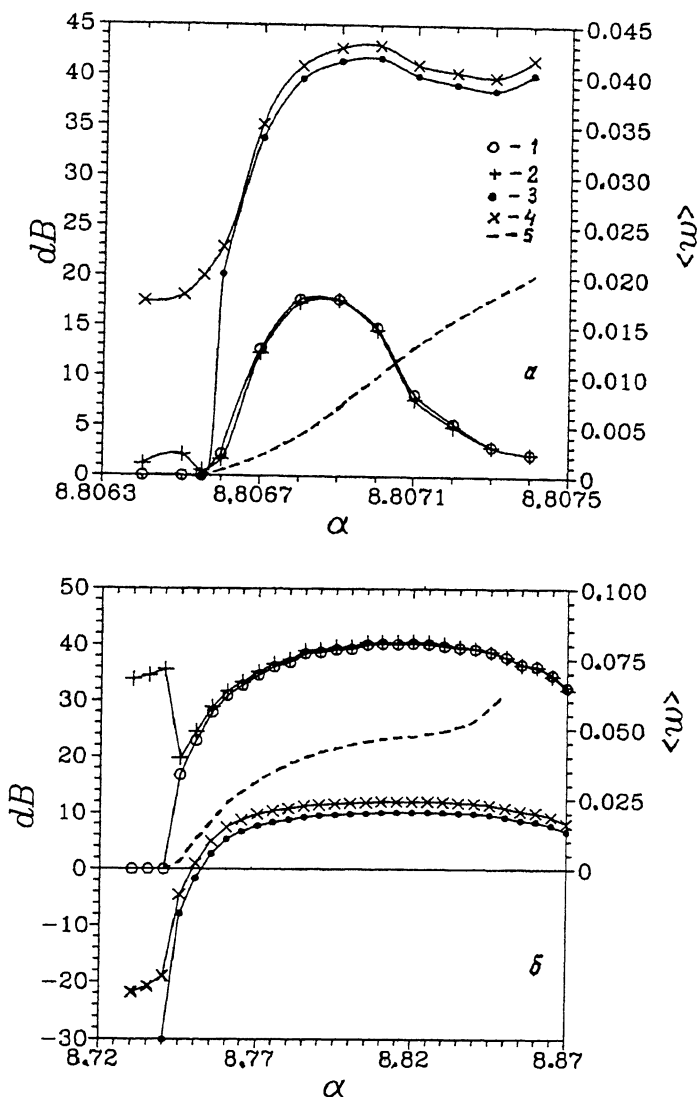
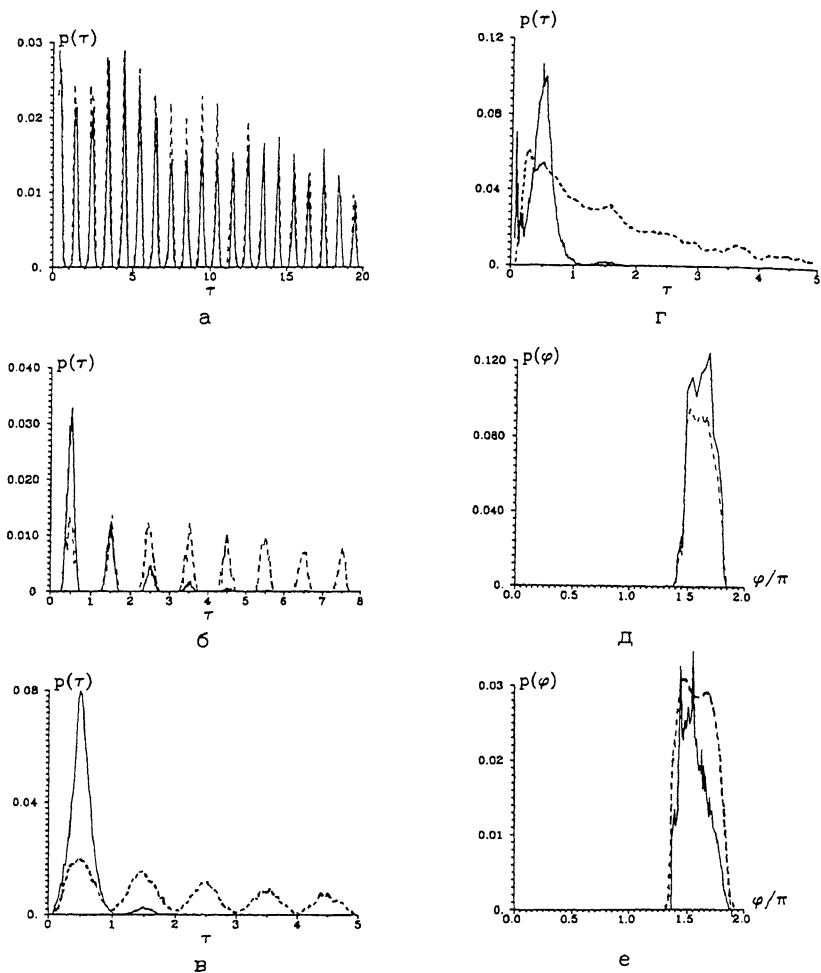


Рис. 1. Зависимость характеристик на выходе системы от параметра  $\alpha$  для двух режимов воздействия: а —  $a = 0.001$ , б —  $a = 0.3$ : 1 —  $SNR_t$ , 2 —  $SNR_f$ , 3 —  $\eta_t$ , 4 —  $\eta_f$ , 5 —  $\langle \omega \rangle$ .

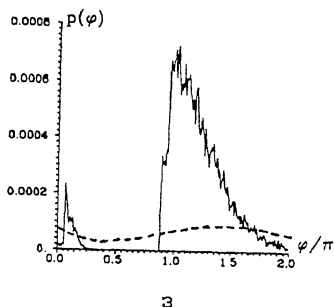
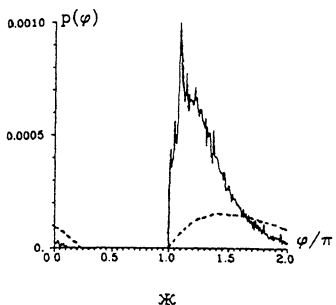
можно условно разбить на пять областей: 1 — отсутствие переключений; 2 — возникновение переключений; 3, 4, 5 — рост, максимум и уменьшение  $SNR$  соответственно.

В области значений  $\alpha$ , при которых переключения отсутствуют,  $SNR_t = 0$ , а поведение  $SNR_f$  определяется струк-



**Рис. 2.** Статистические характеристики процесса переключений для различных областей зависимости  $SNR$ : а, д — вторая область; б, е — третья область; в, ж — четвертая область; з, з — пятая область. Зависимости  $p(\tau)$  изображены на рисунках а-г, а  $p(\varphi)$  — д-з. Сплошным кривым соответствует режим сильного воздействия, пунктирным — режим слабого воздействия.

турой хаотического аттрактора. В момент начала переключений  $SNR_f$  уменьшается, а значение  $SNR_t$  становится отличным от нуля. Усиление в этой области начинает увеличиваться. Распределение времен пребывания состоит из последовательности пиков, расположенных на време-



ж

з

Рис. 2 (продолжение).

нах, кратных периоду сигнала  $T_c/2 + nT_c$ , где  $n = 0, 1, 2 \dots$  (рис. 2, а). Так как внешнее воздействие определяет расположение пиков плотности распределения  $p(\tau)$ , то структуру  $p(\tau)$  можно назвать когерентной. Огибающая пиков повторяет данную характеристику в отсутствие сигнала. Переключения происходят в узком интервале значений фазы сигнала (рис. 2, д).

При увеличении  $\alpha$  частота переключений растет, увеличиваются  $SNR$  и  $\eta$ . Происходят изменения в структуре времен пребывания (рис. 2, б): наиболее вероятными становятся переключения в течение одного периода сигнала. Высоты пиков на временах  $T/2 + nT$  убывают по экспоненциальному закону. Таким образом, плотность распределения времен пребывания  $p(\tau)$  имеет ярко выраженную структуру. Распределение фазы сигнала в момент переключений  $p(\varphi)$  становится шире (рис. 2, е).

При некотором значении  $\alpha$  величины  $SNR_f$ ,  $SNR_t$  и  $\eta_f$ ,  $\eta_t$  имеют максимальные значения, т. е. наблюдается стохастический резонанс.

Из сравнения рис. 1, а и б видно, что с ростом амплитуды периодического сигнала область СР по параметру  $\alpha$  увеличивается. Наблюдаются также отличия в поведении статистических характеристик для разных значений  $a$ . Для слабого воздействия ( $a = 0.01$ ) средняя частота переключений  $\langle \omega \rangle$  монотонно растет с увеличением параметра  $\alpha$ . При сильном воздействии ( $a = 0.3$ ) в области СР имеется область по параметру  $\alpha$ , в которой  $\langle \omega \rangle$  практически не меняется и близка к частоте периодического сигнала  $\omega_c$ . В момент СР вероятность перехода в течение периода внешнего сигнала наибольшая (рис. 2, в), но если в режиме слабого воздействия пики на временах  $T_c/2 + nT_c$  остаются, то при большой амплитуде сигнала имеется практически толь-

ко один пик на  $T_c/2$ . Переключения могут происходить в широкой области значений фазы сигнала (рис. 2, ж). Вероятность перехода в фазе с сигналом преобладает, тогда как вероятность перехода в противофазе равна нулю. При слабом воздействии отсутствует прямая взаимосвязь (которая наблюдается в стохастических бистабильных системах) между максимумом  $SNR$  и величиной  $\langle \omega \rangle$ .

Уменьшение отношения сигнал/шум для разных амплитуд сигнала имеет различный физический механизм. В случае слабого воздействия уменьшение  $SNR$  и  $\eta$  связано с тем, что вероятность переключений в противофазе становится отличной от нуля (рис. 2, з) и происходит размывание когерентной структуры пиков плотности распределения  $p(\tau)$  (рис. 2, з). Уменьшение  $SNR$  и  $\eta$  при сильном воздействии связано с инерционными свойствами системы: так как воздействие велико, то после переключения система может по инерции переключиться обратно. В плотности распределения времен пребывания  $p(\tau)$  процессу инерционного переключения соответствует узкий пик, расположение которого связано с фундаментальным периодом доминирующего, но неустойчивого, предельного цикла, на базе которого через последовательность бифуркаций удвоения периода возник хаотический аттрактор [4]. При этом структура на временах  $T_c/2 + nT_c$  сохраняется. Как видно из рис. 2, з, преобладают переходы синфазные с внешним воздействием, вероятность переключения в противофазе равна нулю и имеется пик вероятности переходов, который связан с инерционностью системы.

Таким образом, эффект стохастического резонанса в цепи Чуа в режиме хаоса определяется степенью когерентности между периодическим возмущением и откликом системы. При разрушении когерентности (точнее, когерентной структуры в вероятностных характеристиках  $p(\tau)$  и  $p(\varphi)$ ) отношение сигнал/шум начинает уменьшаться. Можно выделить два механизма разрушения когерентности в зависимости от режима воздействия:

— при слабом воздействии переключения могут происходить при любом значении фазы сигнала (вероятность переключения в противофазе отлична от нуля);

— при сильном воздействии проявляются инерционные свойства цепи Чуа (возникают инерционные переключения).

На основании вышеизложенного явление СР в хаотической цепи Чуа можно назвать *когерентным* стохастическим резонансом.

Работа частично финансировалась за счет средств Российского фонда фундаментального естествознания (грант N 95-0-8.3-66).

### Список литературы

- [1] Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Stochastic Resonance. J. Stat. Phys. 1993. V. 70. N 1-2.
- [2] International workshop on Fluctuations in Physics and Biology: Stochastic Resonance, Signal Processing and Related Phenomenon. IL NUOVO CIMENTO D. 1995. V. 17. N 7-8.
- [3] Jung P. // Phys. Rep. 1994. V. 234. N 175.
- [4] Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O. // J. Circuits, Systems and Computer. 1993. V. 3. N 2. P. 553-578.
- [5] Anishchenko V.S., Neiman A.B., Safonova M.A. // J. Stat. Phys. 1993. V. 70. N 1-2. P. 183-196.
- [6] Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. V. 4. N 2. P. 441-446.
- [7] Nicolis G., Nicolis C., McKernan D. // J. Stat. Phys. 1993. V. 70. N 1/2. P. 125-137.
- [8] Anishchenko V.S., Neiman A.B., Chua L.O. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. V. 4. N 1. P. 99-107.
- [9] Arecci F.T., Badii R., Politi A. // Phys. Rev. A. 1984. V. 29. P. 1006-1011.
- [10] Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [11] Anishchenko V.S. Dynamical Chaos-Models and Experiments. Singapore: World Scientific, 1995. 400 p.
- [12] Анищенко В.С., Нейман А.Б. // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. С. 1063-1066.
- [13] Chua L., Komuro M., Matsumoto T. // IEEE Trans. Circuits Syst. 1986. V. 33. P. 1073-1118.
- [14] Moss F. Stochastic resonance: from the Ice Ages to the Monkey's ear, Dept. of Physics. University of Missouri at Saint Louis, 1992. 60 p.
- [15] Zhou T., Moss F. // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. N 8. P. 4255-4264.

Поступило в Редакцию  
6 августа 1996 г.

---