Письма в ЖТФ, том 22, вып. 21 12 ноября 1996 г.

01;09

К ВОПРОСУ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ И ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДАХ

© *В.И.Короза*

Идея метода "поперечных сечений", развитого для исследования монохроматических волн в нерегулярных волноводах [1–3], обобщается и распространяется на анализ нестационарных и переходных процессов, возникающих при импульсных режимах работы таких волноводов. Указанное обобщение представляет интерес, так как в ряде важных случаев практическая реализация представления нестационарных явлений в линейных системах суперпозицией монохроматических решений при численном анализе крайне затруднена вследствие значительной ширины частотного спектра (в частности, для коротких импульсов либо импульсов с крутыми фронтами). Вариационным методом получена математическая модель в форме "системы связанных струн". Рассмотрен пример.

Функционал

$$\mathcal{J}(\mathcal{H},\mathcal{H}_0)=\int\limits_{\Omega}\left\{\varepsilon^{-1}(\mathbf{r})\Big(\operatorname{rot}\mathcal{H},\operatorname{rot}\mathcal{H}_0\Big)-\frac{\mu(\mathbf{r})}{c^2}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t},\frac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial t}\right)\right\}d\Omega \tag{1}$$

зависит от двух вектор-функций $\mathcal{H}(\mathbf{r},t)$ и $\mathcal{H}_0(\mathbf{r},t)$ четырех независимых переменных (времени t и трех пространственных координат — $\mathbf{r}$). Область интегрирования Ω в интеграле (1) ограничена отрезком четырехмерного цилиндра с временны́м интервалом $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+T$ в качестве образующей (при некоторых фиксированных значениях t_0 и T). Направляющей цилиндра является замкнутая поверхность — граница рассматриваемого отрезка волноведущей вдоль некоторой оси z системы ($z_0 \leqslant z \leqslant z_1$) при фиксированных ($z_0$ и z_1), состоящая из идеально проводящей боковой поверхности Π и ортогональных оси z плоских сечений, пересекающих ось в точках z_0 и z_1. Металлическая поверхность Π может состоять из нескольких связных частей (например, для волноводов кабельного типа число таких частей равно двум).

Условие стационарности

$$\delta_{\mathcal{H}_0}\mathcal{J}(\mathcal{H},\mathcal{H}_0)=0 \tag{2}$$

рассматриваемого функционала (1) при варьировании его по $\mathcal{H}_0$ на классе вектор-функций сравнения с условиями "закрепленных концов"

$$\delta\mathcal{H}_0(\mathbf{r},t_0) = \delta\mathcal{H}_0(\mathbf{r},t_0+T) = \delta\mathcal{H}_0\Big(\mathbf{r}|_{z=z_0},t\Big) = \delta\mathcal{H}_0\Big(\mathbf{r}_{z=z_1},t\Big) = \vec{0}$$

эквивалентно такому выбору фиксированной при определении $\delta_{\mathcal{H}_0},\mathcal{J}$ в условии (2) напряженности магнитного поля $\mathcal{H}(\mathbf{r})$, которая удовлетворяет во внутренних точках области Ω уравнению

$$\operatorname{rot}\Big(\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\mathcal{H}\Big) + \frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial t^2} = \vec{0}, \tag{4}$$

а на поверхности Π — условию

$$\Big[\operatorname{rot}\mathcal{H},\mathbf{n}\Big] = \vec{0}, \tag{5}$$

эквивалентному краевому условию на границе идеального проводника для режимов с нулевым значением статического поля в соответствующих точках границы.

Таким образом, определение всего многообразия решений краевой задачи электродинамики (4)–(5) с учетом связанной, в частности с незамкнутостью, поверхности, на которой задано условие (5), неединственностью решения сводится к вариационной задаче (2)–(3) для функционала (1). Полагая

$$\mathcal{H}(\mathbf{r},t) = \sum \mathbf{e}_j(\mathbf{r}_\perp,z)f_j(z,t) \text{ и } \mathcal{H}_0(\mathbf{r},t) = \sum \mathbf{e}_j(\mathbf{r}_\perp,z)g_j(z,t), \tag{6}$$

где $\{\mathbf{e}_j(\mathbf{r}_\perp,z)\}$ — совокупность базисных вектор-функций в сечениях волновода $S(z)$ перпендикулярными оси z плоскостями. Каждая из них зависит от координат $\mathbf{r}_\perp$ в поперечных сечениях $S(z)$ и от соответствующих значений z как параметра.

После подстановки (6) в (1) вследствие (2) и условий

$$\delta g_i(z,t_0) = \delta g_i(z,t_0+T) = \delta g_i(z_0,t) = \delta g_i(z_1,t) = 0,$$

которые соответствуют (3), приходим к системе дифференциальных уравнений для определения неизвестных $\{f_j(z,t)\}$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[G(z)\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z} + Q(z)\mathbf{f}\right] - Q^\tau(z)\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z} - P(z)\mathbf{f} - T(z)\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial t^2} = \vec{0}. \tag{7}$$

Здесь $G(z)$, $Q(z)$, $P(z)$, $T(z)$ — матрицы с элементами

$$G_{ij}(z) = \iint\limits_{S(z)} \varepsilon^{-1}\Big([\mathbf{z}^0, \mathbf{e}_i], [\mathbf{z}^0, \mathbf{e}_j]\Big) dS;$$

$$Q_{ij}(z) = \iint\limits_{S(z)} \varepsilon^{-1}\Big(\operatorname{rot}\mathbf{e}_j, [\mathbf{z}^0, \mathbf{e}_i]\Big) dS;$$

$$P_{ij}(z) = \iint\limits_{S(z)} \varepsilon^{-1}\Big(\operatorname{rot}\mathbf{e}_i, \operatorname{rot}\mathbf{e}_j\Big) dS; \quad T_{ij}(z) = \frac{1}{c^2}\iint\limits_{S(z)} \mu(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) dS; \tag{8}$$

$Q^{\tau}(z)$ — транспонированная $Q(z)$; $\mathbf{f} = \mathbf{f}(z,t)$ — столбец с координатами $f_j(z,t)$. Размерность квадратных матриц — коэффициентов (7) и столбца неизвестных $\mathbf{f}$ совпадает с числом удерживаемых слагаемых в суммах (6) и должна возрастать с увеличением точности расчетов.

В качестве базисных вектор-функций естественно использование для каждого значения z распределений напряженности магнитного поля нормальных волн соответствующего регулярного волновода того же поперечного сечения $S(z)$. При этом в (7) коэффициенты $G(z)$ и $T(z)$ при старших производных $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial z^2}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}$ оказываются диагональными матрицами, в результате чего каждая строка системы (7) имеет форму уравнения колебаний некоторой струны в упругой среде, связанной посредством перекрестных членов (отличные от нуля недиагональные элементы матриц $Q(z)$ и $P(z)$) с другими струнами, которым отвечают другие строки этой системы. Возвращающая сила, действующая на элемент длины каждой струны, обусловлена упругостью как самой струны (сила натяжения), так и среды (диагональные элементы матрицы $P(z)$).

В качестве примера рассмотрим нерегулярную систему аксиального типа с внутренней проводящей поверхностью $r = a(z)$ и наружной — $r = b(z)$ $(0 < a(z) < b(z))$. Ограничимся случаем $\lambda(z) = b(z)/a(z) = \lambda_0 = \text{const}$. При этом для поступающего на вход нерегулярного участка ТЕМ-импульса двухмодовое приближение [4,5] приводит после преобразования к уравнениям системы двух связанных струн

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial \tau^2} = \frac{A_s^-}{h \ln \lambda_0}\frac{\partial}{\partial z}\Big[a^1(z) f_s\Big], \tag{9_1}$$

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f_s}{\partial \tau^2} - F_s^2(z) f_s = -\frac{2h}{A_s^+}\frac{a^1(z)}{a^2(z)}\frac{\partial f_0}{\partial z}. \tag{9_2}$$

Здесь $x_s = x_s(\lambda_0)$ — корень уравнения $\mathcal{N}(\lambda_0 x_s)\mathcal{J}_0(x_s) - \mathcal{J}_0(\lambda_0 x_s)\mathcal{N}_0(x_s) = 0$; $\mathcal{J}_p(x)$ и $\mathcal{N}(x)$ — функции Бесселя 1 и 2 рода; $\tau = ct/\sqrt{\varepsilon\mu}$; $A_s^{\pm} = \lambda_0 B_s(\lambda_0 x_s) \pm B_s(x_s)$, $B_s(u) = \mathcal{N}_0(\lambda_0 x_s)\mathcal{J}_1(u) - \mathcal{J}_0(\lambda_0 x_s)\mathcal{N}_1(u)$. Ограничиваясь предположением малости $a'(z)$ и $b'(z)$ с точностью до слагаемых второго порядка малости, имеем $F^2(z) = x_s^2/a^2(z)$. При вычислении коэффициентов системы (9_1)–(9_2) с помощью (8) применялись значения

$$\mathbf{e}_0 = hr^{-1}\varphi^0,$$

$$\mathbf{e}_s = \left[\mathcal{N}_0(\lambda_0 x_s)\mathcal{J}_1\Big(\lambda_0 x_s r/b(z)\Big) - \mathcal{J}_0(\lambda_0 x_s)\mathcal{N}_1\Big(\lambda_0 x_s r/b(z)\Big)\right]\varphi^0,$$

где φ^0 — азимутальный орт, h — фиксированная постоянная с размерностью длины.

Адиабатическое приближение для "вынужденной" компоненты величины f_s при ступенчатом входном импульсе f_0 (ТЕМ-волна) в пренебрежении обратным влиянием f_s на f_0 (т.е. в предположении $f_s \ll f_0$) дает $f_s \sim \exp[\lambda_s(z)]$. Этот результат согласуется с полученным в [5] для полосковой геометрии с той разницей, что для коаксиальной геометрии величина "приведенной длины" $\lambda_s(z)$ определяется выражением

$$\lambda_s(z) = x_s \int\limits_{z_0}^{z} \frac{du}{a(u)}, \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

которое в предельном случае ($\lambda_0 = 1 + \nu$, $\nu \to +0$) переходит в соответствующее выражение для полосковой геометрии [5].

Список литературы

[1] *Schelkunoff S.A.* // Bell System Techn. J. 1955. V. 34. N 5. P. 995.
[2] *Каценеленбаум Б.З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР. 1961. 216 с.
[3] *Короза В.И.* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186. № 4. С. 795–798.
[4] *Короза В.И., Нечаев М.Н., Цветков С.А.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. В. 11. С. 1–5.
[5] *Короза В.И.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. В. 20. С. 26–29.

Научно-исследовательский институт
импульсной техники
Москва

Поступило в Редакцию
12 февраля 1996 г.